– ESSEC 2018 –

I – Loi des deux plus grands

1. a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x)$

$$= \mathbb{P}(\max(X_1, \cdots, X_n) \leq x)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq x)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) \quad \text{(indépendance)}$$

$$= (F(x))^n \quad \text{(car les } X_i \text{ suivent la même loi que } X\text{)}$$

cl $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) = (F(x))^n\right]$

1.b) Selon les hypothèses f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et α
donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et α.
De plus F est continue sur $\mathbb{R}$ car X est une variable aléatoire à densité.
Dès lors, par composée ($x \mapsto x^n$ est C^1 sur $\mathbb{R}$) G_n est continue sur $\mathbb{R}$
et C^1 sauf peut être en 0 et α

cl $\left[Y_n \text{ est une v.A à densité}\right]$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \alpha\} \quad G_n'(x) = nF'(x)(F(x))^{n-1} = nf(x)[F(x)]^{n-1}$

cl une densité de Y_n est donnée par $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n(x) = nf(x)[F(x)]^{n-1}\right]$
car elle est à valeurs positives et coïncide avec G_n' là où G_n est C^1.

1. c) f est nulle en dehors de $]0, \alpha[$ donc g_n aussi.
Dès lors $\int_{-\infty}^{+\infty} x g_n(x)\,dx = \int_0^{\alpha} x\, nf(x)[F(x)]^{n-1}\,dx$ converge absolument
car elle n'est pas impropre

cl $\left[Y_n \text{ admet une espérance}\right]$

2. a) i) Soit $x \in \mathbb{R}$
Le deuxième plus grand des nombres $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ est inférieur ou égal à x signifie exactement qu'ils sont tous inférieurs ou égaux à x sauf peut être 1.

Dès lors $(Z_n \leq x)$ ssi tous les X_i sont inférieurs ou égaux à x
ou un des X_i est strictement supérieur à x
et les autres lui sont inférieurs.

Dès lors $\left[(Z_n \leq x) = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq x)}_{A} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(X_i > x) \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X_j \leq x)}_{B_i} \right) \right]$

2.a) ii) les évts A et B_i $(1 \leq i \leq n)$ sont 2 à 2 incompatibles donc

$$P(Z_n \leq x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq x)\right) + \sum_{i=1}^{n} P\left((X_i > x) \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X_j \leq x)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) + \sum_{i=1}^{n} P(X_i > x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P(X_j \leq x)$$ les X_i sont indépendantes

$$= (F(x))^n + \sum_{i=1}^{n} (1-F(x))(F(x))^{n-1}$$ les X_i suivent la même loi que X

d'où $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad H_n(x) = (F(x))^n + n(1-F(x))(F(x))^{n-1} \right]$

2.b) Comme vu en 1.b) F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et α.

Dès lors, par opération sur les fct° continues et de classe C^1, H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et α

d'où $[$ Z_n est une variable aléatoire à densité. $]$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \alpha\} \quad H_n'(x) = n f(x) [F(x)]^{n-1} + n\left(-f(x)[F(x)]^{n-1} + (1-F(x))(n-1) f(x) [F(x)]^{n-2}\right)$$

$$= n(n-1) f(x) (1-F(x)) [F(x)]^{n-2}$$

d'où Une densité de Z_n est donnée par :

$\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad h_n(x) = n(n-1) f(x) (1-F(x)) [F(x)]^{n-2} \right]$

3.
```
def deux_plus_grands(n):
    X = simulX(n)
    if X[0] > X[1]:
        y,z = X[0], X[1]
    else:
        y,z = X[1], X[0]
    for k in range(2,n):
        if X[k] > y:
            y,z = X[k], y
        elif X[k] > z:
            z = X[k]
    return y,z
```

4. a) Attention aux contraintes de l'énoncé ! f doit être nulle en dehors d'un intervalle ouvert $]0,\alpha[$

On pose donc $f(x) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{si } x \in]0,\alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ← et pas $[0,\alpha]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x/\alpha & \text{si } x \in]0,\alpha[\\ 1 & \text{si } x \geqslant \alpha \end{cases}$$

d'où selon 1.b) et 2b)

$$\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n(x) = \begin{cases} n \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-1} & \text{si } x \in]0,\alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right]$$

$$\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad h_n(x) = \begin{cases} n(n-1)\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-2} & \text{si } x \in]0,\alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right]$$

4. b) Selon 1.c) $E(Y_n)$ existe et $E(Y_n) = \int_0^\alpha x \cdot \frac{n}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-1} dx$

$$= \frac{n}{\alpha^n}\int_0^\alpha x^n dx$$

$$= \frac{n}{\alpha^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{n}{\alpha^n} \times \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$$

d'où $\left[E(Y_n) = \frac{n\alpha}{n+1}\right]$

De même $E(Z_n)$ existe et

$$E(Z_n) = \int_0^\alpha x\, n(n-1)\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-2} dx$$

$$= \frac{n(n-1)}{\alpha^n}\int_0^\alpha (\alpha - x)\, x^{n-1} dx$$

$$= \frac{n(n-1)}{\alpha^n}\int_0^\alpha \alpha\, x^{n-1} dx - \frac{n(n-1)}{\alpha^n}\int_0^\alpha x^n dx$$

$$= \frac{n(n-1)}{\alpha^n}\alpha\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^\alpha - \frac{n(n-1)}{\alpha^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\alpha$$

$$= (n-1)\alpha - \frac{n(n-1)}{n+1}\alpha$$

$$= (n-1)\alpha\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

d'où $\left[E(Z_n) = \frac{n-1}{n+1}\alpha\right]$

5. a) i) • f est positive sur $\mathbb{R}$

car $\frac{a x^{a-1}}{\alpha^a} > 0$ sur $]0,\alpha[$ $(a > 0$ et $\alpha > 0)$

et car elle est nulle ailleurs

• f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et α

car c'est une fct usuelle sur $]0,\alpha[$, nulle ailleurs

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^\alpha \lambda \frac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda}\,dx$

$= \frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\left[\frac{x^\lambda}{\lambda}\right]_0^\alpha$

$= 1$

cl de ces 3 points $\left[f \text{ est une densité de probabilité} \right]$

5.a) ii) • Si $x<0$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0\,dt = 0$

• Si $x \in [0,\alpha]$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0\,dt + \int_0^x \lambda \frac{t^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda}\,dt$

$= \frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\left[\frac{t^\lambda}{\lambda}\right]_0^x = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda$

• Si $x>\alpha$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^x 0\,dt = 1$

cl $\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda & \text{si } x \in [0,\alpha] \\ 1 & \text{si } x>\alpha \end{cases} \right]$

5.a) iii) $E(X)$ existe car $X(\Omega) =]0,\alpha[$ est fini

$E(X) = \int_0^\alpha x f(x)\,dx = \int_0^\alpha \lambda \cdot \frac{x^\lambda}{\alpha^\lambda}\,dx$

$= \frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\left[\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right]_0^\alpha$

$= \frac{\lambda\alpha}{\lambda+1}$

cl $\left[E(X) \text{ existe et } E(X) = \frac{\lambda\alpha}{\lambda+1} \right]$

5.b) i) Selon 1.b) $\quad g_n(x) = n f(x) [F(x)]^{n-1}$

$= \begin{cases} n\lambda \frac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda}\left(\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda\right)^{n-1} & \text{si } x \in]0,\alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} n\lambda \frac{x^{n\lambda-1}}{\alpha^{n\lambda}} & \text{si } x \in]0,\alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on reconnait la densité d'une loi puissance de paramètre $n\lambda$

cl $\left[Y_n \text{ suit une loi puissance de paramètre } n\lambda \right]$

5.b) ii) Selon 5.a) ii) en remplaçant λ par $n\lambda$

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{n\lambda}{n\lambda+1}\alpha}$$

5.c) On sait selon 2b) que $h_n(x) = n(n-1) f(x) (1-F(x)) [F(x)]^{n-2}$

Donc $h_n(x) = \begin{cases} n(n-1)\lambda \cdot \frac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda}\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda(n-2)} & \text{si } x \in]0,\alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$Z_n(\Omega) =]0,\alpha[$ est fini donc $E(Z_n)$ existe

$$E(Z_n) = \int_0^\alpha x h_n(x)\, dx$$

$$= n(n-1)\frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\int_0^\alpha x^\lambda \left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda(n-2)} dx$$

$$= n(n-1)\frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\cdot\left[\frac{1}{\alpha^{\lambda(n-2)}}\int_0^\alpha x^{\lambda(n-1)}\, dx - \frac{1}{\alpha^{\lambda(n-1)}}\int_0^\alpha x^{\lambda n} dx\right]$$

$$= n(n-1)\frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\left[\frac{1}{\alpha^{\lambda(n-2)}}\left[\frac{x^{\lambda(n-1)+1}}{\lambda(n-1)+1}\right]_0^\alpha - \frac{1}{\alpha^{\lambda(n-1)}}\left[\frac{x^{\lambda n+1}}{\lambda n+1}\right]_0^\alpha\right]$$

$$= n(n-1)\frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\left(\frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda(n-1)+1} - \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda n+1}\right)$$

$\underline{\underline{\text{cl}}}$ $$\boxed{E(Z_n) = n(n-1)\lambda\alpha\left(\frac{1}{\lambda(n-1)+1} - \frac{1}{\lambda n+1}\right)}$$

II - Un problème d'optimisation

6. a) <u>Rappel</u> si f est une fonction bijective de I dans J, si $b \in J$ et si $a = f^{-1}(b)$

Alors f^{-1} est dérivable en b ssi $f'(a) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$

Soit $y \in]0,\beta[$ et $x = \sigma^{-1}(y)$

selon l'énoncé $\sigma'(x) > 0$ donc d'après le rappel σ^{-1} est dérivable en y

et $(\sigma^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\sigma'(x)} = \dfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))}$

cl $\left[\sigma^{-1} \text{ est dérivable sur }]0,\beta[\text{ et } \forall y \in]0,\beta[\quad (\sigma^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))} \right]$

6. b) $\forall (x,y) \in]0,\alpha[\times]0,\beta[\quad \gamma(x,y) = (x-y)\, G_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$

$(x,y) \mapsto x-y$ est C^1 car polynôme

$y \mapsto G_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$ est C^1 sur $]0,\beta[$ car G_{n-1} et σ^{-1} sont C^1 sur $]0,\alpha[$ et $]0,\beta[$ selon les hypothèses.

Dès lors $[\gamma \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,\alpha[\times]0,\beta[\,]$

Posons $u(y) = x-y$ et $v(y) = G_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$

$\forall y \in]0,\alpha[\quad u'(y) = -1$ et $v'(y) = (\sigma^{-1})'(y)\, G'_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$

$$= \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))} g_{n-1}(\sigma^{-1}(y))$$

Dès lors $\left[\partial_2 \gamma(x,y) = -G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) + (x-y) \dfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(y))} g_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) \right]$

6. c) Selon les hypothèses $y \mapsto \gamma(x,y)$ atteint son maximum en $y = \sigma(x)$

Comme cette fonction est dérivable sur l'ouvert $]0,\beta[$ sa dérivée est nulle en ce point

cl $[\forall x \in]0,\alpha[\quad \partial_2(\gamma)(x,\sigma(x)) = 0]$

On a donc $-G_{n-1}(\sigma^{-1}(\sigma(x))) + (x-\sigma(x)) \dfrac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(\sigma(x)))} \cdot g_{n-1}(\sigma^{-1}(\sigma(x))) = 0$

puis $-G_{n-1}(x) + (x-\sigma(x)) \dfrac{1}{\sigma'(x)} g_{n-1}(x) = 0 \qquad (\sigma^{-1}(\sigma(x)) = x)$

$\Big\} \times \sigma'(x)$

alors $-\sigma'(x)\, G_{n-1}(x) + x g_{n-1}(x) - \sigma(x)\, g_{n-1}(x) = 0$

cl $\boxed{\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma'(x)\, G_{n-1}(x) + \sigma(x)\, g_{n-1}(x) = x g_{n-1}(x)}$

6.d) On remarque que $\sigma'(x)\, G_{n-1}(x) + \sigma(x)\, g_{n-1}(x) = \sigma'(x) G_{n-1}(x) + \sigma(x)\, G'_{n-1}(x)$

qui est la dérivée de $x \mapsto \sigma(x)\, G_{n-1}(x)$

Alors $\forall x \in]0,\alpha[, \displaystyle\int_0^x t g_{n-1}(t)\, dt = \int_0^x \left(\sigma'(t)\, G_{n-1}(t) + \sigma(t)\, G'_{n-1}(t)\right) dt$

$$= \left[\sigma(t)\, G_{n-1}(t)\right]_0^x$$

$$= \sigma(x)\, G_{n-1}(x) \qquad \text{(car } \sigma(0)=0 \text{ par hypothèse)}$$

cl $\boxed{\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = \dfrac{1}{G_{n-1}(x)} \displaystyle\int_0^x t g_{n-1}(t)\, dt}$

6.e) Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = g_{n-1}(t) \end{cases}$ ie $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = G_{n-1}(t) \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $]0,\alpha[$ (car g_{n-1} est C^1 sur $]0,\alpha[$)

on a donc :

$$\int_0^x t g_{n-1}(t)\, dt = \left[t\, G_{n-1}(t)\right]_0^x - \int_0^x G_{n-1}(t) dt$$

$$= x\, G_{n-1}(x) - \int_0^x G_{n-1}(t)\, dt$$

cl $\boxed{\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = \dfrac{1}{G_{n-1}(x)} \displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t) dt = x - \dfrac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x G_{n-1}(t) dt}$

Rmq la fct° G_{n-1} étant C^1 sur $]0,\alpha[$ mais pas nécessairement sur $[0,\alpha[$ on aurait dû, en toute rigueur faire l'IPP sur $[A,x]$ avec $A \in]0,\alpha[$ puis faire tendre A vers 0.

7. a) Selon 1.b) $\quad \forall t \in]0,\alpha[\quad t g_{n-1}(t) = n t f(t) [F(t)]^{n-1} > 0$

Dès lors, par positivité améliorée $\displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt > 0$

Dès lors $\forall x \in]0,\alpha[\quad \boxed{\sigma(x) = \dfrac{1}{G_{n-1}(x)} \displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt > 0}$

De même $\forall x \in]0,\alpha[\quad \displaystyle\int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\, dt > 0$

donc $\boxed{\sigma(x) = x - \displaystyle\int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\, dt < x}$

cl $\boxed{\forall x \in]0,\alpha[\quad 0 < \sigma(x) < x}$

7.b) • $t \mapsto G_{n-1}(t)$ est continue sur $[0,\alpha[$

donc $x \mapsto \int_0^x G_{n-1}(t)\,dt$ est C^1 sur $[0,\alpha[$ de dérivée $x \mapsto G_{n-1}(x)$

• $x \mapsto G_{n-1}(x)$ est C^1 sur $]0,\alpha[$ (car g_{n-1} est continue sur $]0,\alpha[$)

Or $\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = x - \dfrac{1}{G_{n-1}(x)} \displaystyle\int_0^x G_{n-1}(t)\,dt$

donc [σ est C^1 sur $]0,\alpha[$] comme quotient de telles fonctions

$$\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma'(x) = 1 - \frac{\int_0^x G_{n-1}(t)\,dt \times G'_{n-1}(x) - G_{n-1}(x) \cdot G_{n-1}(x)}{(G_{n-1}(x))^2}$$

$$= 1 - \frac{g_{n-1}(x)\int_0^x G_{n-1}(t)\,dt - (G_{n-1}(x))^2}{(G_{n-1}(x))^2}$$

$$= \frac{g_{n-1}(x)\int_0^x G_{n-1}(t)\,dt}{(G_{n-1}(x))^2}$$

$$= \frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)} \cdot \underbrace{\int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\,dt}_{= x - \sigma(x) \text{ selon } 6e)}$$

$$= \frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)}(x - \sigma(x))$$

Or g_{n-1} et G_{n-1} sont strictement positives sur $]0,\alpha[$

donc [pour tt $x \in]0,\alpha[$ $\sigma'(x)$ est du signe de $x - \sigma(x)$]

Selon 7.a) $\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) < x$ donc $x - \sigma(x) > 0$

Dès lors [$\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma'(x) > 0$]

7.c) σ est continue (car C^1) sur $]0,\alpha[$ et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0,\alpha[$ donc $I =]\lim_{x \to 0} \sigma(x) \,;\, \lim_{x\to\alpha} \sigma(x)[$

• selon 7.a) $\forall x \in]0,\alpha[\quad 0 < \sigma(x) < x$

donc selon le thm de l'encadrement [$\lim_{x \to 0} \sigma(x) = 0$]

– selon 6.d) $\sigma(x) = \dfrac{1}{G_{n-1}(x)} \displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\,dt$

donc $\lim_{x \to \alpha} \sigma(x) = \dfrac{1}{G_{n-1}(\alpha)} \displaystyle\int_0^\alpha t\, g_{n-1}(t)\,dt$

or g_{n-1} est nulle en dehors de $]0,\alpha[$ donc $\int_0^\alpha t g_{n-1}(t)\,dt = E(Y_{n-1})$

et $G_{n-1}(\alpha) = 1$. J'en déduis que [$\lim_{x \to \alpha} \sigma(x) = E(Y_{n-1})$]

cl $\left[\sigma \text{ réalise une bijection de }]0,\alpha[\text{ dans }]0,\beta[\text{ avec } \beta = E(Y_{n-1})\right]$

7.d) i) Soit $x \in]0,\alpha[$, $y \in]0,\beta[$ et $z = \sigma^{-1}(y)$ donc $y = \sigma(z)$

$$\begin{aligned}\gamma(x,y) &= (x-y)\, G_{n-1}(\sigma^{-1}(y)) \\ &= (x-\sigma(z))\, G_{n-1}(z) \\ &= (x - z + z - \sigma(z))\, G_{n-1}(z) \\ &= (x-z)\, G_{n-1}(z) + (z-\sigma(z))\, G_{n-1}(z)\end{aligned}$$

astuce

enfin selon 6.e) $z - \sigma(z) = \int_0^z \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(z)}\, dt$

cl $\left[\gamma(x,y) = (x-z)\, G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)\, dt\right]$

7.d) ii) Si $y = \sigma(x)$ alors $z = x$

En remplaçant dans l'égalité 7.d) i)

$$\begin{aligned}\gamma(x,\sigma(x)) &= (x-x)\, G_{n-1}(x) + \int_0^x G_{n-1}(t)\, dt \\ &= \int_0^x G_{n-1}(t)\, dt\end{aligned}$$

Alors
$$\begin{aligned}\gamma(x,y) &= (x-z)\, G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)\, dt \\ &= (x-z)\, G_{n-1}(z) + \int_0^x G_{n-1}(t)\, dt + \int_x^z G_{n-1}(t)\, dt \quad \text{(Chasles)} \\ &= (x-z)\, G_{n-1}(z) + \gamma(x,\sigma(x)) + \int_x^z G_{n-1}(t)\, dt\end{aligned}$$

cl $\left[\gamma(x,\sigma(x)) - \gamma(x,y) = (z-x)\, G_{n-1}(z) - \int_x^z G_{n-1}(t)\, dt\right]$

7.d) iii) Je remarque que $z - x = \int_x^z 1\, dt$

Dès lors
$$\begin{aligned}\gamma(x,\sigma(x)) - \gamma(x,y) &= \int_x^z G_{n-1}(z)\, dt - \int_x^z G_{n-1}(t)\, dt \\ &= \int_x^z (G_{n-1}(z) - G_{n-1}(t))\, dt\end{aligned}$$

La fonction G_{n-1} est croissante car c'est une fct° de répartition

- Si $x \leq z$ alors $\forall t \in [x,z]$ $G_{n-1}(z) - G_{n-1}(t) \geq 0$
  et les bornes sont dans le bon sens donc $\gamma(x,\sigma(x)) - \gamma(x,y) \geq 0$
- Si $x > z$ alors $\int_x^z (G_{n-1}(z) - G_{n-1}(t))\, dt = \int_z^x (G_{n-1}(t) - G_{n-1}(z))\, dt$
  et on conclue de même.

cl $\left[\forall x \in]0,\alpha[\ \forall y \in]0,\beta[\quad \gamma(x,\sigma(x)) - \gamma(x,y) \geq 0\right]$

On a donc $\forall x \in]0,\alpha[\ \forall y \in]0,\beta[\quad \gamma(x,y) \leq \gamma(x,\sigma(x))$

[Pour x fixé $y \mapsto \gamma(x,y)$ atteint son maximum en $y = \sigma(x)$]

8.a) Soit $x \in]0,\alpha[$ selon le thme de transfert

$$E(\varphi_x(Y_{n-1})) = \int_0^\alpha \varphi_x(t)\, g_{n-1}(t)\, dt$$ car $Y_{n-1}(\Omega) =]0,\alpha[$

$$= \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt$$ car $\varphi_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > x \\ t & \text{si } t \leq x \end{cases}$

D'autre part $P(Y_{n-1} \leq x) = G_{n-1}(x)$

Dès lors $\dfrac{E(\varphi_x(Y_{n-1}))}{P(Y_{n-1} \leq x)} = \dfrac{\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt}{G_{n-1}(x)} = \sigma(x)$ selon 6.e)

cq [$\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = \dfrac{E(\varphi_x(Y_{n-1}))}{P(Y_{n-1} \leq x)}$]

8.b)

```
def Sigma(x,n):
    N = 10000
    Y = []
    for k in range(N):
        X = simulX(n-1)          # on crée un N échantillon de Y_{n-1}
        Y.append(max(X))

    S=0
    T=0
    for k in range(N):
        if Y[k] <= x:            # S est le nbre de fois où Y_{n-1} <= x
            S = S+1              # T est la somme des φ_x(Y_{n-1})
            T = T+Y[k]
    return T/S                   # T/N est une estimation de E(φ_x(Y_{n-1}))
                                 # S/N est une estimation de P(Y_{n-1} <= x)
```

donc $\frac{T}{S}$ est une estimation de $\sigma(x) = \dfrac{E(\varphi_x(Y_{n-1}))}{P(Y_{n-1} \leq x)}$

9.a) Selon 4.d) si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,\alpha[)$ on a

$\forall t \in]0,\alpha[\quad g_{n-1}(t) = (n-1)\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)^{n-2}$

donc $\forall x \in]0,\alpha[\quad \displaystyle\int_0^x t\, g_{n-1}(t)\, dt = \frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \int_0^x t^{n-1}\, dt$

$$= \frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \frac{x^n}{n}$$

et $G_{n-1}(x) = \int_0^x g_{n-1}(t)\,dt = \frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \int_0^x t^{n-2}\,dt$

$= \frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \, \frac{x^{n-1}}{n-1} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-1}$

Dès lors $\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t\, g_{n-1}(t)\,dt$ (selon 6.d))

$$= \frac{\frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \, \frac{x^n}{n}}{\frac{n-1}{\alpha^{n-1}} \, \frac{x^{n-1}}{n-1}}$$

cl Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,\alpha[)$ alors $\left[\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = \frac{n-1}{n} x\right]$

9.b) Si X suit une loi puissance de paramètres α et λ alors selon 5.a).i) et 5.a).ii) $\quad \forall t \in]0,\alpha[\quad G_{n-1}(t) = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\lambda(n-1)}$

Donc $\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = x - \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x G_{n-1}(t)\,dt$

$$= x - \frac{\alpha^{\lambda(n-1)}}{x^{\lambda(n-1)}} \int_0^x \frac{t^{\lambda(n-1)}}{\alpha^{\lambda(n-1)}}\,dt$$

$$= x - \frac{1}{x^{\lambda(n-1)}} \left[\frac{t^{\lambda(n-1)+1}}{\lambda(n-1)+1}\right]_0^x$$

$$= x - \frac{x}{\lambda(n-1)+1}$$

cl Si X suit une loi puissance de paramètres α et λ alors
$\left[\forall x \in]0,\alpha[\quad \sigma(x) = x\left(1 - \frac{1}{\lambda(n-1)+1}\right)\right]$

Si $n=6$, $\lambda = 0{,}2$ et $\alpha = 50$ $\quad \sigma(x) = x\left(1 - \frac{1}{0{,}2\times5+1}\right)$

$$= \frac{x}{2}$$

cela correspond bien à la courbe que l'on observe.

III - Modélisation d'enchère

10. A_n remporte l'enchère :

- si sa mise y_n est supérieure strictement aux mises $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_{n-1})$ de chaque acheteur précédent
- ou si sa mise y_n est supérieure ou égale aux mises des acheteurs précédents et s'il est tiré au sort.

L'évènement E_n : "l'acheteur remporte l'enchère" vérifie donc :

$$\left(\max(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_{n-1})) < y_n\right) \subset E_n \subset \left(\max(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_{n-1})) \leq y_n\right)$$

On admet que, comme σ est strict. croissante,

$$\max(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_{n-1})) = \sigma(\max(X_1, \dots, X_{n-1})) = \sigma(Y_{n-1})$$

On a donc $P(\sigma(Y_{n-1}) < y_n) \leq P(E_n) \leq P(\sigma(Y_{n-1}) \leq y_n)$

puis $P(Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)) \leq P(E_n) \leq P(Y_{n-1} \leq \sigma^{-1}(y_n))$

Y_{n-1} est une v.A à densité donc $P(Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)) = 0$

Dès lors $P(Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)) = P(Y_{n-1} \leq \sigma^{-1}(y_n))$

cl $\left[P(E_n) = P(Y_{n-1} \leq \sigma^{-1}(y_n)) \right]$

Par définition $R_n = \begin{cases} x_n - y_n & \text{si } E_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $R_n = (x_n - y_n) \mathbb{1}_{E_n}$

Dès lors, par linéarité de l'espérance $E(R_n) = (x_n - y_n) E(\mathbb{1}_{E_n})$

or $\mathbb{1}_{E_n} \hookrightarrow \mathcal{B}(P(E_n))$ donc $E(\mathbb{1}_{E_n}) = P(E_n)$

$$= P(Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n))$$

$$= G_{n-1}(\sigma^{-1}(y_n))$$

cl $\left[E(R_n) = (x_n - y_n)\, G_{n-1}(\sigma^{-1}(y_n)) \right]$

11. Selon les notations de la partie II $E(R_n) = \gamma(x_n, y_n)$

qui est maximal pour $y_n = \sigma(x_n)$

cl [L'acheteur a intérêt à appliquer la stratégie σ]

12.a) Supposons que $m \geq x_n$

- Si A_n remporte l'enchère alors il paye le prix m donc $r = x_n - m \leq 0$
- Si A ne la remporte pas alors $R = 0$

cl $\boxed{\text{Dans tous les cas le résultat net de } A_n \text{ est négatif ou nul}}$

Si $y_n = x_n$ alors A_n ne peut remporter l'enchère que si $y_n = m$ (il est alors choisi au hasard parmi les gagnants).

Dans ce cas, $R_n = x_n - m = y_n - m = 0$

12.b) Supposons que $m < x_n$

- si $y_n < m$ alors A_n ne remporte pas l'enchère et $r_n = 0$
- si $y_n > m$ alors A_n remporte l'enchère et $r_n = x_n - m > 0$
- Si $y_n = m$ alors A_n peut ou pas remporter l'enchère (choix au hasard) et $r_n = 0$ ou $x_n - m$.

12.c) Si le joueur choisit de miser $x_n = y_n$ alors

- dans le cas b) il remporte l'enchère et son gain est strictement positif
- dans le cas a) son résultat net est 0 qui est le meilleur cas possible d'après 12.a)

cl $\boxed{\text{La meilleure stratégie est de miser } x_n = y_n}$

13.a) L'acheteur paye le prix correspondant à la plus grosse mise.

Donc $B_n = \max(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n))$ (chaque acheteur adopte la stratégie σ)

$= \sigma(\max(X_1, \dots, X_n))$

$= \sigma(Y_n)$

cl $\boxed{B_n = \sigma(Y_n)}$

13.b) Selon le thme de transfert, sachant que $Y_n(\Omega) =]0, \alpha[$

$$E(B_n) = \int_0^\alpha \sigma(x) g_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^\alpha \sigma(x)\, n f(\ )[F(x)]^{n-1} dx$$

$$= \int_0^\alpha \sigma(x)\, n f(x)\, G_{n-1}(x)\,dx \qquad \text{car } G_{n-1}(x) = [F(x)]^{n-1}$$

d $\boxed{E(B_n) = n\int_0^\alpha \sigma(x)\, G_{n-1}(x) f(x)\, dx}$

De plus selon 6.d) $\sigma(x)\, G_{n-1}(x) = \int_0^x t g_{n-1}(t) dt$

d $\boxed{E(B_n) = n\int_0^\alpha \left(\int_0^x t g_{n-1}(t) dt\right) f(x)\, dx}$

13.c) Posons $\begin{cases} u(x) = \int_0^x t g_{n-1}(t) dt \\ v'(x) = f(x) \end{cases}$ ie $\begin{cases} u'(x) = x g_{n-1}(x) \\ v(x) = F(x) \end{cases}$

u et v sont C^1 sur $]0,\alpha[$. Comme l'intervalle est ouvert il faudrait faire l'IPP sur un intervalle $[A,B] \subset]0,\alpha[$ puis faire tendre A vers 0 et B vers α.

$$E(B_n) = n \left[\int_0^x t g_{n-1}(t)\, dt\, F(x)\right]_0^\alpha - n\int_0^\alpha x g_{n-1}(x) F(x)\, dx$$

$$= n\int_0^\alpha t g_{n-1}(t)\, dt\, F(\alpha) - 0 - n\int_0^\alpha x g_{n-1}(x) F(x)\, dx$$

or $X(\Omega) =]0,\alpha[$ donc $F(\alpha) = 1$

Il vient $E(B_n) = n\int_0^\alpha t g_{n-1}(t) dt - n\int_0^\alpha x g_{n-1}(x) F(x)\, dx$

d $\boxed{E(B_n) = n\int_0^\alpha x g_{n-1}(x)\, (1 - F(x))\, dx}$

14. Le revenu du vendeur est égal à la deuxième plus grande mise. Les mises étant égales aux valeurs privées, on a donc $B_n' = Z_n$.

En particulier $\boxed{E(B_n') = E(Z_n)}$

15. Selon 1.b) $E(Z_n) = \int_0^\alpha x h_n(x) dx$

$$= \int_0^\alpha x\, \underbrace{n(n-1) f(x) (F(x))^{n-2}}_{= g_{n-1}(x) \text{ d'après } 1.b)} (1 - F(x))\, dx$$

$$= \int_0^\alpha x g_{n-1}(x)\, (1 - F(x))\, dx$$

$$= E(B_n) \quad \text{selon } 13.b)$$

d $\boxed{E(B_n) = E(Z_n)}$