

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit a un réel; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Etude du cas où $a = 1$.

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M , puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M .
3. La matrice M est-elle inversible? La matrice M est-elle diagonalisable?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M , et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.

On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M .

Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E .
8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.
9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.
10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T .
11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M , et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable?

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n .

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et que :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.$$

2. Étudier les variations de f_n .
 3. Démontrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
 En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
 4.(a) Démontrer que :

$$\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

- (b) Montrer alors que :

$$\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2} (x - 1)^2.$$

- (c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer que $f_n(1) < 0$.
 6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
 On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite.

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n) , où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.

On admettra que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n + 2} - \frac{1}{2n + 1} \right).$$

- 8.(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
 (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$.
 (c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
 9.(a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.
 (b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4(b) de la partie A, montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}.$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables.

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, G_n(x, y) = f_n(x) \times f_n(y).$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n .
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

EXERCICE 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

- (a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
- (b) Donner la fonction de répartition de X .
- (c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.
- (d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.
3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \frac{a}{U^{1/3}}$.
 - (a) Déterminer $Y(\Omega)$.
 - (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.
 - (c) Écrire une fonction en langage Scilab d'en-tête : `function Y=simulX(a,m,n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X . Ces réels seront choisis de façon indépendante.
 À cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m,n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendante.

- 4.(a) Calculer $P([X > 2a])$.
 (b) Calculer $P_{[X > 2a]}([X > 6a])$.
 (c) On suppose que la fonction Scilab de la question 3 a été programmée correctement et compilée. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

a=10
N=100000
s1=0
s2=0
X=simulX(a,1,N)
for k=1:N
    if ..... then
        s1=s1+1
        if X(k)>6*a then
            .....
        end
    end
end
if s1>0 then
    disp(.....)
end
  
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a .

Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

5. On pose $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a .
 (b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n}$.
 6. On pose $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
 (a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.
 (b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

- (c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
 Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a .
 (d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

7. On rappelle que :

- Si A est une matrice Scilab, l'instruction : $A(i,:)$ renvoie la i ème ligne de la matrice A .
- Si A est une matrice Scilab (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : $\text{sum}(A)$ renvoie la somme des coefficients de la matrice A .
- Si X est une matrice ligne, l'instruction : $\text{plot2d}(X, \text{style}=-1)$ représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de croix droites.
- Si X est une matrice ligne, l'instruction : $\text{plot2d}(X, \text{style}=-2)$ représente graphiquement les coefficients de X à l'aide de croix obliques.

(a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```
function V=simulV(a,m,n)
    X=simulX(a,m,n)
    V=zeros(1,m)
    for k= .....
        V(k)= .....
    end
endfunction
```

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire simulW permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

(b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
W=simulW(...,...,...)
V=simulV(...,...,...)
plot2d(...,style=-1)
plot2d(...,style=-2)
```

On justifiera la réponse pour les deux dernières lignes.

