— ECRICOME 2021 —

Exercice 1

PARTIE A

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $M = \alpha I_3$

$$M \in \mathcal{A} \iff \alpha I_3 (\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = 0_3$$
$$\iff \alpha I_3 (\alpha+1) I_3 (\alpha+2) I_3 = 0_3$$
$$\iff \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) I_3 = 0_3 \quad \text{car } I_3 \times I_3 \times I_3 = I_3$$
$$\iff \alpha = 0 \text{ ou } \alpha+1=0 \text{ ou } \alpha+2=0 \quad \text{car } I_3 \neq 0_3$$

cl: l'ensemble des réels α tq $\alpha I_3 \in \mathcal{A}$ est $\boxed{\{0, -1, -2\}}$

2. D'après 1. $-1.I_3$ et $-2I_3$ appartiennent à $\mathcal{A}$.
cependant $-1I_3 + (-2I_3) = -3I_3$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$ (car -3 ne fait pas partie des réels trouvés en 1).
cl: $\mathcal{A}$ n'est pas stable par l'addition donc $\mathcal{A}$ n'est pas un ss espace vectoriel de E.

3. (a) $BX_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2X_1 \qquad BX_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2$

(b) X_1 et X_2 sont non nuls (ne pas oublier de le préciser !)
et $BX_1 = -2X_1$; $BX_2 = -X_2$
cl: $\boxed{-1 \text{ et } -2 \text{ sont valeurs propres de } B}$ et X_1 et X_2 sont des vecteurs propres associés.

• Déterminons $E_{-1}(B)$

$$E_{-1}(B) = \ker(B + I_3) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (B+I_3)X = 0_3 \right\}$$

$B+I_3=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Posons $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$X\in E_{-1}(B) \iff \begin{cases} -y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ -y+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1$$

Le système est de rang 2 à 3 inconnues. Il y a donc une infinité de solution à $3-2=1$ paramètre, disons z.

$$X\in E_{-1}(B) \iff \begin{cases} x=z \\ y=z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

donc $E_{-1}(B)=\left\{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z\in\mathbb{R}\right\}$

ie $E_{-1}(B)=\mathrm{Vect}(X_2)$ où X_2 est la matrice colonne de 3.(a)

$X_2\neq\theta$ donc (X_2) est libre et c'est une base de $E_{-1}(B)$

- Déterminons $E_{-2}(B)$

$$E_{-2}(B)=\ker(B+2I_3)=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (B+2I_3)X=\theta\}$$

$B+2I_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $X\in E_{-2}(B) \iff \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

Le système est de rang 1. Il y a une infinité de solutions à 2 paramètres, disons y et z.

$$X\in E_{-2}(B)=\begin{cases} x=y-z \\ y\in\mathbb{R} \quad y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

donc $E_{-2}(B)=\left\{\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\right\}$

Il vient $E_{-2}(B) = \left\{ y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ avec } y\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}(X_1, X_3)$ avec $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $X_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Or X_1 et X_3 ne sont pas colinéaires donc (X_1, X_3) est libre.

Une base de $E_{-2}(B)$ est (X_1, X_3)

(c) $\dim(E_{-1}(B)) + \dim(E_{-2}(B)) = 3$ qui est l'ordre de la matrice B

Ce B est diagonalisable

Je pose $P = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_2 & X_1 & X_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Alors $B = PDP^{-1}$

(d) $D(D+I_3)(D+2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & & (0) \\ & -2 & \\ (0) & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & -1 & \\ (0) & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ (pté des matrices diagonales), donc $\boxed{D \in \mathcal{A}}$

Montrons que $B \in \mathcal{A}$

1ère rédaction soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à B dans la base canonique.

D'après (c) il existe une base $\mathcal{C}$ tq $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = D$

On a $D(D+I_3)(D+2I_3) = O$ donc d'après la passerelle matrices / endomorphismes $f\circ(f+Id)\circ(f+2Id) = \theta$

Mais alors comme $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ alors d'après la passerelle on a $B(B+I_3)(B+2I_3) = O$

Ce $\boxed{B \in \mathcal{A}}$

2ème rédaction possible

$B = PDP^{-1}$ donc $P^{-1}BP = D$

D'après le point précédent $D(D+I_3)(D+2I_3)=0_3$

Il vient : $P^{-1}BP(P^{-1}BP+I_3)(P^{-1}BP+2I_3)=0_3$

puis $P^{-1}B\underbrace{P(P^{-1}}_{=I_3}(B+I_3)\underbrace{P)(P^{-1}}_{I_3}(B+2I_3)P)=0_3$ car $P^{-1}P=I_3$

et donc $P^{-1}B(B+I_3)(B+2I_3)P=0_3$

En multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} il vient

$B(B+I_3)(B+2I_3)=0$ donc $\boxed{B\in\mathcal{A}}$

4. Supposons que M est une matrice de E diagonalisable telle que $Sp(M)\subset\{0,-1,-2\}$

Alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M=PDP^{-1}$ et $D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & (0)\\ & \alpha_2 & \\ (0) & & \alpha_3\end{pmatrix}$ où les coefficients $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ appartiennent à $\{0,-1,-2\}$

Un calcul analogue à celui de 3.(d) montre alors que $D\in\mathcal{A}$,

et le même raisonnement qu'en 3.(d) amène $M\in\mathcal{A}$

cqfd $\boxed{\text{Si } M \text{ est diagonalisable et si } Sp(M)\subset\{0,-1,-2\} \text{ alors } M\in\mathcal{A}}$

PARTIE B

5. On a $M(M+I_3)(M+2I_3)=0$ donc $P=X(X+1)(X+2)$ est un polynôme annulateur de M.

Les valeurs propres possibles de M sont les racines de P.

Or les racines de P sont clairement $0,-1$ et -2

cqfd $\boxed{Sp(M)\subset\{0,-1,-2\}}$

6. Si M admet $0, -1$ et -2 comme valeurs propres alors M est carrée d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes

cl $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$

7. (a) Supposons que -1 est l'unique valeur propre de M.
Alors le seul réel λ pour lequel $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible est -1
Dès lors $M = M - 0I_3$ et $M + 2I_3 = M - (-2)I_3$ sont inversibles.

De plus $M \in \mathcal{A}$ donc $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$
je multiplie à gauche par M^{-1} et à droite par $(M+2I_3)^{-1}$

$$\underbrace{M^{-1}M}_{=I_3}(M+I_3)\underbrace{(M+2I_3)(M+2I_3)^{-1}}_{=I_3} = \underbrace{M^{-1}\cdot 0_3}_{=0_3}(M+2I_3)^{-1}$$

Il vient $M + I_3 = 0_3$ donc $\boxed{M = -I_3}$

(b) Si $Sp(M) = \{-2\}$ alors on montre de même que M et $M + I_3$ sont inversibles et on déduit de $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0_3$ que $M + 2I_3 = 0_3$ donc $\boxed{M = -2I_3}$

Si $Sp(M) = \{0\}$ alors $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles.
on en déduit que $\boxed{M = 0_3}$

8. Si M n'admet aucune valeur propre alors pour $\forall$ réel λ on a $M - \lambda I_3$ est inversible.
En prenant $\lambda = 0$ puis -1 puis -2 on en déduit que M, $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles.
Alors par pté $M(M+I_3)(M+2I_3)$ est inversible. C'est absurde car $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0_3$ qui n'est pas inversible.

cl par l'absurde, M admet au moins une valeur propre.

9. (a) on reprend le raisonnement de 7. (a)

Si $Sp(M) = \{-1, 2\}$ alors M est inversible.

On déduit de $M(M+I_3)(M+2I_3) = O_3$, en multipliant à gauche par M^{-1} que $(M+I_3)(M+2I_3) = O_3$

Par la passerelle matrices/endomorphismes $\boxed{(f+Id)\circ(f+2Id) = 0}$

Les matrices M et I_3 commutent entre elles donc

$(M+2I_3)(M+I_3)$ est aussi égale à O_3

Toujours par la passerelle, j'en déduis que $\boxed{(f+2Id)\circ(f+Id) = 0}$

(b) Par définition $Ker(f+Id) = E_{-1}(f)$ et $Ker(f+2Id) = E_{-2}(f)$

Or -1 et -2 sont des valeurs propres de M et donc de f.

cl $dim(Ker(f+Id)) = dim(E_{-1}(f)) \geqslant 1$

de même $dim(Ker(f+2Id)) \geqslant 1$.

(c) M n'est pas diagonalisable donc f non plus. La somme des dimensions des espaces propres de f est donc strictement inférieure à 3 :

$$dim(Ker(f+Id)) + dim(Ker(f+2Id)) < 3$$

Or d'après (b) $dim(Ker(f+Id)) + dim(Ker(f+2Id)) \geqslant 2$

Il vient $dim(Ker(f+Id)) + dim(Ker(f+2Id)) = 2$

cl $dim(Ker(f+Id)) = 1$ et $dim(Ker(f+2Id)) = 1$.

(d) i) u et v sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres différentes.

cl D'après le cours $\boxed{(u, v) \text{ est libre}}$.

ii) Si $w \notin Vect(u, v)$ alors (u, v, w) est libre.

De plus $card(u, v, w) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

iii) $(f+Id)\circ(f+2Id)=0$

donc en particulier $[(f+Id)\circ(f+2Id)](w)=0$

d'où $(f+Id)[f(w)+2w]=0$

On a donc $f(w)+2w \in \mathrm{Ker}(f+Id)$

Or (u) est une base de $\mathrm{Ker}(f+Id)$ en effet u est un élt non nul de $\mathrm{Ker}(f+Id)$ donc (u) est libre avec $\mathrm{card}(u)=1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f+Id))=1$.

Dès lors $\mathrm{Ker}(f+Id)=\mathrm{Vect}(u)$ donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(w)+2w=\alpha u$

De même $(f+2Id)\circ(f+Id)(w)=0$ donc $(f+2Id)(f(w)+w)=0$ donc $f(w)+w\in\mathrm{Ker}(f+2Id)$.

Or (v) est une base de $\mathrm{Ker}(f+2Id)$ (même raisonnement que ci-dessus).

Il existe donc $\beta\in\mathbb{R}$ tq $f(w)+w=\alpha v$

On a donc $\begin{cases} f(w)+w=\alpha v \\ f(w)+2w=\alpha u\end{cases}$ donc $w=\alpha u-\alpha v$ $L_2\leftarrow L_2-L_1$

on en déduit que w est combinaison linéaire de u et v.

Mais alors $w\in\mathrm{Vect}(u,v)$ ce qui contredit l'hypothèse que w n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(u,v)$

cl Si on suppose que M n'est pas diagonalisable on aboutit à une contradiction.

Par l'absurde si $Sp(M)=\{-1,-2\}$ alors M est diagonalisable

10. Supposons $M\in\mathcal{E}$

Alors d'après 5. $Sp(M)\subset\{0,-1,-2\}$ et d'après 6, 7, 8 et 9 dans tous les cas possibles M est diagonalisable.

cl $\boxed{M\in\mathcal{E} \Rightarrow Sp(M)\subset\{0,-1,-2\} \text{ et } M \text{ est diagonalisable}}$

Supposons que M est diagonalisable et $Sp(M) \subset \{0,-1,-2\}$

alors d'après 4. $M \in \mathcal{A}$

donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable et } Sp(M) \subset \{0,-1,-2\} \Rightarrow M \in \mathcal{A}}$

cc L'équivalence demandée est prouvée par double implication.

BILAN
- La partie A était assez classique et permettait de mettre en valeurs les connaissances aquises.
- La partie B était plus difficile en particulier les questions 9 et 10. Elle permettait aux meilleurs étudiants de se distinguer. Il y avait moyen de grapiller quelques points dans cette partie (questions 5, 6, 9(c), 9(d) i ii)

Exercice 2

PARTIE A

1.(a) $\lim_{t \to 0} t^n = 0$ donc $t^n \underset{t \to 0}{=} o(1)$ et $1+t^n \underset{t \to 0}{\sim} 1$

cc par quotient $\boxed{\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \to 0}{\sim} \ln(t)}$

(b) Une primitive de $t \mapsto \ln(t)$ est $t \mapsto t\ln(t) - t$ sur $]0,+\infty[$

Donc $\forall y \in]0,1]$ $\int_y^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_y^1$

$= 1\ln(1) - 1 - y\ln(y) + y$

cc $\boxed{\forall y \in]0,1] \quad \int_y^1 \ln(t)\,dt = -1 + y - y\ln(y)}$

$\lim_{y \to 0} -1 + y - y\ln(y) = -1$ (théorème de croissances comparées) (TCC)

donc $\lim_{y \to 0} \int_y^1 \ln(t)\,dt = -1$

cc $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\,dt \text{ converge et } \int_0^1 \ln(t)\,dt = -1}$

Rmq question inutile puisque $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ fait partie des intégrales de référence !

(c) • $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ donc $\dfrac{-\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$

⚠ $\ln(t) \leq 0$ sur $]0,1]$ il faut multiplier par -1 pour pouvoir dire que les intégrales sont ATP

• $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge donc $\int_0^1 -\ln(t)\,dt$ converge

• les intégrales sont à termes positifs (ATP)

cc selon le théorème de comparaison des intégrales ATP
$\int_0^1 \dfrac{-\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ converge donc $\boxed{J_n \text{ converge}}$

2. (a) $\dfrac{t^{3/2}\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^{3/2}\ln(t)}{t^n}$ car $1 = o(t^n)$

$\underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}$

$n \geq 2$ donc $n - \frac{3}{2} > 0$ et selon le TCC $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t^{n-3/2}} = 0$

cc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} = 0}$

(b) • de (a) je déduis que $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$

• $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}}\,dt$ converge (Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

• les intégrales sont ATP

cc selon le thme de comparaison $\boxed{K_n = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt \text{ converge.}}$

3. $\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt$ convergent donc $\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt \text{ converge}}$

PARTIE B

4.(a) Soit $t \in]0,1]$ $\quad \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) = \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \dfrac{(1+t^n)\ln(t)}{1+t^n}$

$$= \frac{-t^n \ln(t)}{1+t^n}$$

• $t \in]0,1]$ donc $\ln(t) \leq 0$ et $\dfrac{-t^n \ln(t)}{1+t^n} \geq 0$

• $t \in]0,1]$ donc $t^n \geq 0$ puis $1+t^n \leq 1$ donc $\dfrac{1}{1+t^n} \leq 1$ car $-t^n \ln(t) \geq 0$

et par produit $\dfrac{-t^n \ln(t)}{1+t^n} \leq -t^n \ln(t)$

Des deux points précédents, $\quad 0 \leq \dfrac{-t^n \ln(t)}{1+t^n} \leq -t^n \ln(t)$

cl $\boxed{\forall t \in]0,1] \quad 0 \leq \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -\dfrac{t^n \ln(t)}{1+t^n}}$

(b) $t \mapsto t^n \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale est impropre en 0.

Posons $I(A) = \displaystyle\int_A^1 -t^n \ln(t)\,dt$ pour $A \in]0,1]$.

Je pose $\begin{cases} u(t) = -\ln(t) \\ v'(t) = t^n \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $]0,1]$ donc en intégrant par parties

$$I(A) = \left[-\ln(t) \times \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_A^1 - \int_A^1 -\frac{1}{t} \times \frac{t^{n+1}}{n+1}\,dt$$

$$= -\ln(1) \times \frac{1}{n+1} + \ln(A) \cdot \frac{A^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_A^1 t^n\,dt$$

$$= \ln(A) \cdot \frac{A^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_A^1$$

$$= \ln(A) \cdot \frac{A^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{A^{n+1}}{n+1}\right)$$

$\lim\limits_{A\to 0^+} \ln(A)\cdot\frac{A^{n+1}}{n+1} = 0$ (Tcc) et $\lim\limits_{A\to 0^+} \frac{A^{n+1}}{n+1} = 0$

donc $\lim\limits_{A\to 0^+} I(A) = \frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

cl $\boxed{\int_0^1 -t^n\ln(t)\,dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{(n+1)^2}}$

(c) $\forall t\in]0,1]$ $0\le \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \le -t^n\ln(t)$ d'après a)

J'intègre termes à termes (licite car toutes les intégrales qui interviennent convergent) :

$$0\le \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,dt}_{=J_n} - \underbrace{\int_0^1 \ln(t)\,dt}_{=-1 \text{ d'après } 1.(b)} \le \int_0^1 -t^n\ln(t)\,dt$$

cl $0\le J_n-(-1)\le \frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$ donc selon le théorème de l'encadrement

$\lim\limits_{n\to+\infty} J_n-(-1) = 0$ cl $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -1}$

5.(a) • $\forall x\in[1,+\infty[$, $\ln(x)\geq 0$

• Posons $g(x) = \ln(x) - x$ pour $x\in[1,+\infty[$

g est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que différence de fcts usuelles dérivables et

$$\forall x\in[1,+\infty[\quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
g	-1	$\searrow$	

$g(1) = \ln(1) - 1 = -1$

le maximum de g est -1 donc $\forall x\in[1,+\infty[$ $g(x)\le 0$ et $\ln(x)\le x$

cl des deux points précédents $\boxed{\forall x\in[1,+\infty[\quad 0\le\ln(x)\le x}$

En divisant membre à membre par $1+x^n$ qui est positif strictement, j'obtiens :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{1+x^n}$$

enfin $1 \geq 0$ donc $1+x^n \geq x^n$ et $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n}$

Il vient $\forall x \in [1,+\infty[\ 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}}$

cl $\boxed{\forall x \in [1,+\infty[\ 0 \leq \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}}$

(b) $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^n}\,dx$ converge (selon 2.b)) et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\,dx$ converge

(Riemann avec $\alpha = n-1 > 1$ car $n \geq 3$)

on peut donc intégrer termes à termes :

$$\boxed{0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^n}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\,dx}$$

Enfin si je pose $I(A) = \int_1^A \frac{1}{x^{n-1}}\,dx$ avec $A \geq 1$

on a $I(A) = \int_1^A x^{-n+1}\,dx = \left[\frac{x^{-n+2}}{-n+2}\right]_1^A = \frac{A^{-n+2}}{-n+2} - \frac{1}{-n+2}$

$-n+2 < 0$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} A^{-n+2} = 0$

Dès lors $\lim\limits_{A \to +\infty} I(A) = -\frac{1}{-n+2} = \frac{1}{n-2}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\,dx = \frac{1}{n-2}$

cl $\boxed{0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}}$

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n-2} = 0$ donc selon le thme de l'encadrement $\boxed{\lim K_n = 0}$

Selon Chasles $I_n = J_n + K_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = \lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 0$

cl $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

PARTIE C

6. Soit $n \geq 2$ et $y \in]0,1]$

⚠ le chgt de variable est présenté "à l'envers"

- je pose $u = -\ln(t)$ donc $t = e^{-u}$
- je cherche α, β tq $\begin{cases} e^{-\alpha} = y \\ e^{-\beta} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\ln(y) \\ \beta = -\ln(1) = 0 \end{cases}$
- $u \mapsto e^{-u}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
- je dérive $t = e^{-u}$ par rapport à u $\frac{dt}{du} = -e^{-u}$ donc $dt = -e^{-u}du$

Il vient $\displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_{-\ln(y)}^0 \frac{\ln(e^{-u})}{1+(e^{-u})^n}(-e^{-u}du)$

$$= \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du \quad \text{(Chasles)}$$

cl $\boxed{\forall y \in]0,1] \quad \int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} du}$

7.(a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ une densité de X est donnée par

$$\begin{cases} f(t) = e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Selon le thme de transfert, sous réserve d'existence,

$$E(Y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t}{1+e^{-nt}} \cdot f(t)\, dt$$

$$\boxed{E(Y_n) = \int_{-\infty}^0 0\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+e^{-nt}} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+e^{-nt}} e^{-t} dt}$$

D'après 6. $\displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_{-\ln(y)}^0 \frac{-t}{1+e^{-nt}} e^{-t} dt$

or $\displaystyle\lim_{y \to 0} \int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = J_n$ qui converge

en faisant tendre y vers 0^+ dans l'égalité précédente,
avec $\lim_{y \to 0^+} -\ln(y) = +\infty$

$\int_{+\infty}^{0} \frac{-t}{1+e^{-nt}} e^{-t} dt$ converge et est égale à J_n.

D'après Chasles on a donc $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+e^{-nt}} e^{-t} dt$

Cette intégrale est absolument convergente (convergente et à termes positifs).

cq $\boxed{Y_n \text{ admet une espérance et } E(Y_n) = J_n}$

8.
```
function Y=simulY(n,m)
    Y=zeros(1,m)
    for i=1:m
        X=grand(1,1,'exp',1)
        Y(i)=-X/(1+exp(-n*X))
    end
endfunction
```

9.(a) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendants de même espérance m et de même variance σ^2
et soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

On a $\lim_{n\to+\infty} P(|\bar{X}_n - m| > \varepsilon) = 0$ pour $\forall \varepsilon > 0$.

(b) Pour un entier n donné par l'utilisateur, le programme simule 1000 fois la variable aléatoire Y_n et affiche la moyenne des résultats obtenus.
Selon la loi des grands nombres le résultat obtenu est une valeur approchée de $E(Y_n) = J_n$

Rmq on aura bien sûr reconnu la méthode de Monte-Carlo !

BILAN
- les parties A et B étaient relativement accessibles et peu calculatoires.
- la partie C était plus sélective

On peut regretter qu'une grande partie du programme ne soit pas abordée : étude de fonctions, suites, fonctions de deux variables.

Exercice 3

PARTIE A

1. • $(X=2) = F_1 \cap F_2$ donc $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(F_1).\mathbb{P}(F_2)$ (les lancers sont indépendants)
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

• $(X=3) = P_1 \cap F_2 \cap F_3$ donc $\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3)$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

• $(X=4) = (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4)$

donc $\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4)$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

cl $\boxed{a_2 = \frac{1}{4}\ ,\ a_3 = a_4 = \frac{1}{8}}$

2. U_n est réalisé si on obtient deux piles consécutifs au 2ème lancer ou au 3ème lancer ou ... ou au nème lancer.

Dès lors $U_n = \bigcup_{k=2}^{n} (X=k)$

Les évts $(X=k)$ sont incompatibles donc

$$u_n = \mathbb{P}(U_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X=k)$$

cl $\boxed{\forall n \geq 2 \quad u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k}$

3.(a)
```
function y=simulX()
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile <> 2
        if rand() < 1/2 then pile = pile + 1
        else
            pile = 0)
        end
        tirs = tirs + 1
    end
    y = tirs
endfunction
```
→ si j'obtiens face je remets le compteur à 0 puisque je veux 2 piles de suite

(b)
```
function s=moyenne(n)
    X = zeros(1,n)
    for i=1:n
        X(i) = simulX()
    end
    S = mean(X)
endfunction
```

(c) Lorsque n augmente la valeur moyenne semble s'approcher de 6.
Je conjecture que $\mathbb{E}(X) = 6$ (et que X admet une espérance)

PARTIE B

4.(a) Soit $n \geq 2$. On a $U_{n+1} = U_n \cup (P_n \cap P_{n+1})$

en effet pour obtenir deux fois "piles" de suite au cours des n+1 premiers lancers, il faut les obtenir au cours des n 1ers lancers ou aux lancers n et n+1.

Dès lors $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$

et $\boxed{\forall n \geq 2 \quad \mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})}$

(b) Soit $n \geq 4$

$U_n \cap B_{n+1}$ est réalisé ssi on obtient "pile" aux lancers n et $n+1$ et au moins une fois deux piles consécutifs au cours des n 1ers lancers.

Cela peut arriver aux lancers $n-1$ et n ou avant le $(n-2)$ème lancer.

cl $U_n \cap B_{n+1} = \underbrace{(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})}_{\text{piles en } n \text{ et } n+1 \text{ et en } n-1 \text{ et } n} \cup \underbrace{(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})}_{\text{pile en } n \text{ et } n+1 \text{ et avant le } (n-2)^{\text{ème}} \text{ lancer}}$

ou

(c) Pour $\forall n \geq 4$ on a donc

$$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

(car ces évts sont incompatibles)

$$= \mathbb{P}(P_{n-1}) . \mathbb{P}(P_n) \mathbb{P}(P_{n+1}) + \mathbb{P}(U_{n-2}) . \mathbb{P}(F_{n-1}) \mathbb{P}(P_n) \mathbb{P}(P_{n+1})$$

évts indépendants

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + u_{n-2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} u_{n-2}$$

Enfin d'après (a) $u_{n+1} = u_n + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$

$$= u_n + \mathbb{P}(P_n) \mathbb{P}(P_{n+1}) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} u_{n-2}\right)$$

$$= u_n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2}$$

cl $\boxed{\forall n \geq 4 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})}$

5. $\forall n \geq 4 \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0$ car u_{n-2} est une probabilité et est donc inférieure ou égale à 1.

cl $\boxed{(u_n)_{n \geq 4} \text{ est croissante.}}$

$(u_n)_{n\geq 4}$ est croissante et majorée par 1 (car u_n est une probabilité) donc selon le thme de la limite monotone elle converge vers une limite ℓ.

Par passage à la limite dans $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1-u_{n-2})$

on obtient $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1-\ell) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{8}(1-\ell)$
$\Leftrightarrow \ell = 1$

cl $\boxed{(u_n)_{n\geq 4} \text{ converge vers } 1}$

6. $X(\Omega) = \{-1\} \cup [\![2,+\infty[\![$

$(X=-1)$ est réalisé si on n'obtient jamais deux piles consécutifs

donc $(X=-1) = \overline{\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n}$

il vient $P(X=-1) = 1 - P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right)$

si U_n est réalisé alors U_{n+1} est réalisé donc $(U_n)_{n\geq 2}$ est une suite croissante d'événements.

Il vient $P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(U_n) = 1$ (d'après 5.)

cl $\boxed{P(X=-1) = 1 - P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1-1 = 0}$

PARTIE C

7. Soit $n \geq 4$
$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= 1 - u_n - (1-u_{n+1}) \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8}(1-u_{n-2}) \quad \text{d'après 4.(c)} \\ &= \frac{1}{8} v_{n-2} \end{aligned}$$

cl $\boxed{\forall n\geq 4 \quad v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}}$

8. D'après 2. $u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$ pour $\forall\, n \geq 2$

donc $v_n - v_{n+1} = 1 - u_n - (1 - u_{n+1})$

$$= u_{n+1} - u_n$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} a_k - \sum_{k=2}^{n} a_k$$

$$= a_{n+1} = \mathbb{P}(X = n+1)$$

cl $\boxed{\forall n \geq 2 \quad \mathbb{P}(X=n+1) = v_n - v_{n+1}}$

9. Soit $P(n)$ la p^té^ "$S_n = 6 - 8v_{n+2} - n v_n$"

- Initialisation

$P(2)$ est la p^té^ $S_2 = 6 - 8v_4 - 2v_2$

or $S_2 = \sum_{k=2}^{2} k\,\mathbb{P}(X=k) = 2\,\mathbb{P}(X=2) = 2a_2 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (question 1.)

et $6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 8(1-u_4) - 2(1-u_2)$

$$= 6 - 8 + 8u_4 - 2 + 2u_2$$

$$= -4 + 8u_4 + 2u_2$$

enfin $u_4 = \sum_{k=2}^{4} a_k = a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$u_2 = a_2 = \frac{1}{4}$

donc $6 - 8v_4 - 2v_2 = -4 + 8 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{P(2) \text{ est vraie}}$

- Hérédité

Soit $n \geq 2$ un entier fixé.

Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

$S_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) + (n+1)\,\mathbb{P}(X=n+1)$

donc $S_{n+1} = S_n + (n+1)P(X=n+1)$ $\quad P(X=n+1) = v_n - v_{n+1}$

$= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)(v_n - v_{n+1})$ $\quad$ HdR

$= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)v_n - (n+1)v_{n+1}$

$= 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1}$

Enfin, d'après 7., en remplaçant n par $n+2$ (qui est supérieur à 4)

$$v_{n+2} - v_{n+3} = \frac{1}{8} v_n$$

donc $v_{n+2} = v_{n+3} + \frac{1}{8} v_n$

Il vient $S_{n+1} = 6 - 8\left(v_{n+3} + \frac{1}{8} v_n\right) + v_n - (n+1)v_{n+1}$

$= 6 - 8v_{n+3} - v_n + v_n - (n+1)v_{n+1}$

$= 6 - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1}$ donc $\underline{P(n+1) \text{ est vraie}}$

cl par récurrence $\boxed{\forall n \geq 2 \quad S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n}$

10. • $\forall n \geq 2 \quad S_{n+1} - S_n = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X=k) - \sum_{k=2}^{n} kP(X=k)$

$= (n+1)P(X=n+1) \geq 0$

donc $(S_n)_{n\geq 2}$ <u>est croissante</u>

• pour $\forall n \geq 2 \quad v_n = 1 - u_n$ avec $u_n \in [0,1]$ (car c'est une probabilité)

donc $v_n \geq 0$

Alors $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n \leq 6$ donc $\boxed{(S_n)_{n\geq 2} \text{ est majorée par } 6}$

11. La suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée donc selon le thm de la limite monotone $(S_n)_{n\geq 2}$ converge.

comme $S_n = \sum_{k=2}^{n} kP(X=k)$ qui est à termes positifs j'en déduis

que la série $\sum_{k\geq 2} kP(X=k)$ converge absolument

cl $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$

12.(a) Pour $\forall n \geq 2$ $n v_n = 6 - 8 v_{n+2} - S_n$ d'après 9.

or (S_n) admet une limite d'après 11. et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+2} = 0$

car $v_{n+2} = 1 - y_{n+2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+2} = 1$ d'après 5.

cl $\boxed{(n v_n)_{n\geq 2} \text{ admet une limite}}$ $\ell = 6 - \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

(b) Supposons $\ell \neq 0$

- alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n v_n = \ell$ donc $n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ puis $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$
- $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ell}{n}$ diverge (série harmonique)
- les séries sont ATP (car $v_n \geq 0$ donc $n v_n \geq 0$)

cl selon le thme de comparaison la série $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ diverge

d'après 7. $\forall k \geq 4$ $v_k - v_{k+1} = \frac{1}{8} v_{k-2}$

donc pour $\forall n \geq 4$ $\sum\limits_{k=4}^{n} (v_k - v_{k+1}) = \frac{1}{8} \sum\limits_{k=4}^{n} v_{k-2}$

$$\text{donc} \quad \sum_{k=4}^{n} v_k - \sum_{k=4}^{n} v_{k+1} = \frac{1}{8} \sum_{i=2}^{n-2} v_i \quad \Big\} i = k-2$$

$$\text{puis} \quad \sum_{k=4}^{n} v_k - \sum_{j=5}^{n+1} v_j = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-2} v_i \quad \Big\} j = k+1$$

$$\text{et enfin} \quad v_4 - v_{n+1} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-2} v_i$$

d'un côté $\lim\limits_{n\to+\infty} v_4 - v_{n+1} = v_4$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$

de l'autre $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{8} \sum\limits_{i=1}^{n-2} v_i = +\infty$ car la série $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ diverge

c'est absurde ! cl $\boxed{\text{par l'absurde } (n v_n)_{n\geq 2} \text{ converge vers } 0}$

(c) D'après 11. $E(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

D'après 9. $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} nv_n = 0$ (d'après 12.(b)) et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n+2} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 6$ (par somme) et $\boxed{E(X) = 6}$

BILAN

- La partie A était plutôt accessible
- La partie B comportait deux questions délicates (4(a)(b)) les questions suivantes pouvaient être traitées en admettant ces résultats.
- La partie C était vraiment dure en particulier la récurrence de 9.

BILAN général

Le sujet était intéressant. Il couvrait une partie trop étroite du programme (peu d'analyse, presque pas de variables aléatoires à densité). Il permettait de vérifier les compétences de base des étudiants mais contenait à mon avis trop de questions difficiles ou techniques par rapport au profil des étudiants qu'Ecricome cherche à recruter.

Pour finir, ce sujet était très (trop) long. Il sera sûrement noté sur beaucoup plus que 20. C'est une bonne nouvelle pour les étudiants qui ont réussi à papillonner à travers le sujet pour aller traiter les petites questions accessibles.