— HEC - ERIEC 2021 —

PARTIE 1

1. On veut simuler la loi $\mathcal{G}(Y)$. Selon le préambule, on suppose donc que $\forall t \in J$ $X_t \hookrightarrow \mathcal{G}(t)$

on écrit donc :

```
function r=X(t)
    r=1
    while rand()>t
        r=r+1
    end
endfunction
```

simulation classique d'une loi géométrique

Ensuite, selon le préambule, si $Y(\omega)=t$ alors $Z=X_t(\omega)$
en d'autres termes $Z=X_Y$

```
Y=rand()
Z=X(Y)
disp(Z)
```

2.a) si $Y=y$ alors $Z=X_y$ donc

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall y \in Y(\Omega)$, $P((Z=k)\cap(Y=y)) = P((X_y=k)\cap(Y=y))$
$= P(X_y=k)\cdot P(Y=y)$ " X_y est indépendante de Y "
$= f_k(y)\cdot P(Y=y)$

cl $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall y \in Y(\Omega)\ P((Z=k)\cap(Y=y)) = f_k(y)\,P(Y=y)}$

Si de plus $P(Y=y)\neq 0$, selon la formule des probabilités composées,

$$P((Z=k)\cap(Y=y)) = P(Y=y).P_{(Y=y)}(Z=k)$$

donc $f_k(y)\,P(Y=y) = P(Y=y)\,P_{(Y=y)}(Z=k)$

cl en divisant par $P(Y=y)$: $\boxed{f_k(y) = P_{(Y=y)}(Z=k)}$

b) Les événements $\{(Y=y),\ y\in Y(\Omega)\}$ forment un système complet d'événements donc selon la formule des probabilités totales :

$$P(Z=k) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P((Z=k)\cap(Y=y))$$

$$\overset{2.a)}{=} \sum_{y\in Y(\Omega)} f_k(y)\, P(Y=y)$$

$$= E(f_k(Y)) \quad \text{(théorème de transfert)}$$

cl $\boxed{P(Z=k) = E(f_k(Y))}$

c) On suppose que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $P(Y=n) = n p^2 (1-p)^{n-1}$
et que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

D'après b) $P(Z=k) = E(f_k(Y))$ pour tt $k\in\mathbb{N}^*$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} f_k(n)\, P(Y=n)$$

or $f_k(n) = P(X_n=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k>n \\ \frac{1}{n} & \text{si } k\in[\![1,n]\!] \end{cases}$

il vient $P(Z=k) = \underbrace{\sum_{n=1}^{k-1} 0.\,P(Y=n)}_{=0} + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}.\,P(Y=n)$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}.\, n p^2 (1-p)^{n-1}$$

$$= \frac{p^2}{(1-p)} . \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^n$$

$$= \frac{p^2}{1-p} . (1-p)^k . \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= p(1-p)^{k-1}$$

cl $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $P(Z=k) = p(1-p)^{k-1}$ donc $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

3. a) Selon le théorème de transfert, comme on suppose que $E(g(Y))$ existe, on a :

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y) P(Y=y)$$

De plus $g(y) = E(X_y) = \sum_{k \in X_y(\Omega)} k \, P(X_y = k)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \, P(X_y = k) \quad \text{car par l'énoncé } X_y(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \, f_k(y) \quad \text{(par définition)}$$

cc $\boxed{E(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \, P(Y=y) \right)}$

b) En intervertissant les sommes,

$$E(g(Y)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{y \in Y(\Omega)} k \, f_k(y) P(Y=y)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \underbrace{\sum_{y \in Y(\Omega)} f_k(y) P(Y=y)}_{= P(Z=k) \text{ d'après 2.b)}}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \, P(Z=k)$$

$$= E(Z)$$

cc $\boxed{E(g(Y)) = E(Z)}$

4. On suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et $\forall t \in]0,1[\; X_t \hookrightarrow \mathcal{G}(t)$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, d'après (1),
$P(Z=k) = E(f_k(Y))$ ⚠ Y est à densité !!

(sous réserve de cvgce) $= \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) f_Y(t) \, dt$ → thme de transfert

$Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ donc $\begin{cases} f_Y(t) = 1 & \text{si } t \in]0,1[\\ f_Y(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dès lors $\mathbb{P}(Z=k)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{1} f_k(t).1\,dt+\int_{1}^{+\infty} 0\,dt$

avec $f_k(t)=\mathbb{P}(X_t=k)=t(1-t)^{k-1}$ car $X_t \hookrightarrow \mathcal{G}(t)$

Il vient, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(Z=k)=\int_0^1 t(1-t)^{k-1}dt$

c'est une intégrale d'une fct° continue sur un segment. Elle est donc convergente.

On pose $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=(1-t)^{k-1}\end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=-\frac{(1-t)^k}{k}\end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc en intégrant par parties (IPP)

$$\mathbb{P}(Z=k)=\left[t\times -\frac{(1-t)^k}{k}\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{(1-t)^k}{k}dt$$

$$=0+\frac{1}{k}\left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{k(k+1)}$$

cl $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*\ \mathbb{P}(Z=k)=\frac{1}{k(k+1)}}$

on a $k\,\mathbb{P}(Z=k)=k\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k+1}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k}$

$\sum_{k\geq1}\frac{1}{k}$ est divergente

les séries sont à terme positifs (ATP)

cl selon le thme de comparaison $\sum_{k\geq1} k\,\mathbb{P}(X=k)$ diverge

donc <u>Z n'admet pas d'espérance</u>

b) $X_t \hookrightarrow \mathcal{G}(t)$ donc $\mathbb{E}(X_t)=\frac{1}{t}=g(t)$ pour $\forall t\in]0,1[$

selon le thme de transfert, sous réserve d'existence,

$$\mathbb{E}(g(Y))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_Y(t)dt$$

or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_Y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 \frac{1}{t}\cdot 1\,dt + \int_1^{+\infty} 0\,dt$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$$

cette intégrale est divergente (Riemann avec $\alpha = 1$) donc

<u>$E(g(Y))$ n'existe pas</u>

5. On suppose que $J = [0, +\infty[$, $\forall t \in J$ $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$ et que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après (1)

$$P(Z=k) = E(f_k(Y))$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t) \cdot f_Y(t)\,dt \quad \text{thme de transfert}$$

or $f_k(t) = P(X_t = k) = e^{-t} \cdot \dfrac{t^k}{k!}$

et $f_Y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

il vient $\forall k \in \mathbb{N}$ $\displaystyle P(Z=k) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-\lambda t}\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda \frac{t^k}{k!} e^{-(\lambda+1)t}\,dt$$

- je pose $(\lambda+1)t = x$ ie $t = \frac{1}{\lambda+1} x$
- je cherche α, β tq $\begin{cases} \frac{1}{\lambda+1}\alpha = 0 \\ \frac{1}{\lambda+1}\beta = +\infty \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = +\infty \end{cases}$
- $x \mapsto \frac{1}{\lambda+1} x$ est C^1 sur $[0, +\infty[$
- $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\lambda+1}$ donc $dt = \frac{1}{\lambda+1}\,dx$

Dès lors $\displaystyle P(Z=k) = \int_0^{+\infty} \lambda \left(\frac{x}{\lambda+1}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} e^{-x} \cdot \frac{1}{\lambda+1}\,dx = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x}\,dx$

cl $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\quad \mathbb{P}(Z=k)=\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\,\lambda e^{-(\lambda+1)t}\,dt=\frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx}$

b) Soit $P(k)$ la p^té « $\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx=1$ »

- Initialisat°

$P(0)$ est la p^té $\int_0^{+\infty}\frac{x^0}{0!}e^{-x}dx=1$

c'est vrai car $\int_0^{+\infty}\frac{x^0}{0!}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$ (intégrale de référence)

- Hérédité

Soit $k\geqslant 0$ fixé. Supposons $P(k)$ et montrons $P(k+1)$

$\int_0^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}dx$ est impropre en $+\infty$. Je pose $I(A)=\int_0^A\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}dx$

je pose $\begin{cases}u(x)=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$ donc $\begin{cases}u'(x)=\frac{x^k}{k!}\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ donc par IPP

$$I(A)=\left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}(-e^{-x})\right]_0^A+\int_0^A\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx$$

$$=-\frac{A^{k+1}}{(k+1)!}e^{-A}+\int_0^A\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx$$

$\lim\limits_{A\to+\infty}A^{k+1}e^{-A}=0$ selon le thme de croissances comparées

et $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx=1$ (par HdR)

Dès lors $\int_0^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}dx$ converge et est égale à 1 donc $P(k+1)$ est vraie

cl par récurrence $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}\quad \int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}e^{-x}dx=1}$

c) D'après a) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(Z=k) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx$

$= \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}$ d'après b)

$Z(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(Z+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(Z+1=k) = \mathbb{P}(Z=k-1)$

$= \frac{\lambda}{(\lambda+1)^k}$

$= \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{k-1}$

$= \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{k-1}$

cl $\boxed{Z+1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)}$

d) $Z+1$ admet une espérance et $E(Z+1) = \frac{1}{\lambda/_{\lambda+1}} = \frac{\lambda+1}{\lambda}$

donc Z admet une espérance et $E(Z) = \frac{\lambda+1}{\lambda} - 1 = \frac{1}{\lambda}$

cl $\boxed{E(Z) = \frac{1}{\lambda}}$

La relation (2) énonce que $E(Z) = E(g(Y))$

ici $\forall t \in [0,+\infty[\quad g(t) = E(X_t) = t$ car $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$

Dès lors $E(g(Y)) = E(Y) = \frac{1}{\lambda}$ car $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

cl on a $E(Z) = \frac{1}{\lambda} = E(g(Y))$ donc <u>la relation (2) est vérifiée</u>

BILAN

Il fallait bien prendre le temps de comprendre les définitions des VA (X_t), Y et Z. Les deux premières questions pouvaient être difficiles pour les candidats ayant eu du mal à comprendre les définitions du préambule.

La question 3 était plus difficile. Les question 4 et 5 devaient permettre de gratter des points.

PARTIE 2

6. • D'après l'énoncé le $n^{ème}$ jour les individus contagieux sont ceux qui ont été infectés d jours avant ou moins.
C'est à dire qu'ils ont été infectés entre le $(n-d)^{ème}$ jour et le $n^{ème}$ jour (si $n \geq d$) ou entre le $0^{ème}$ jour et le $n^{ème}$ jour (si $n<d$)

• Un individu ayant étant infecté le $(n-k)^{ème}$ jour présente le $k^{ème}$ jour une contagiosité de α_k le $n^{ème}$ jour.

• Comme il y a z_{n-k} personnes infectées le $(n-k)^{ème}$ jour la contagiosité globale de ces individus le $n^{ème}$ jour est $\alpha_k z_{n-k}$

La contagiosité globale le $n^{ème}$ jour est

$$\sum_{k=0}^{d} \alpha_k z_{n-k} \quad \text{si } n \geq d$$

$$\text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z_{n-k} \quad \text{si } n<d$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}}$

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que I_n et R_n admettent des espérances.
De plus I_n et R_n sont indépendantes.
D'après le cours $Y_n = R_n I_n$ admet une espérance et

$$\boxed{E(Y_n) = E(R_n)\,E(I_n) = r_n\,E(I_n)}$$

on reprend l'égalité (2) du 3. $Z_{n+1} = \mathcal{P}(Y_n)$ on pose donc pour $\forall\, t \in J$ $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$

Alors $g(t) = E(X_t) = t$ et $\boxed{E(Z_{n+1}) = E(g(Y_n)) = E(Y_n) = r_n E(I_n)}$

et $E(Z_{n+1})$ existe.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la p^té « $E(Z_n)$ existe »

. Initialisat°

Selon l'énoncé $Z_0 = 1$ donc $E(Z_0)$ existe et $z_0 = E(Z_0) = 1$.

. Hérédité

Soit $n \geq 0$ fixé.

On suppose que $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies (on procède par récurrence « forte ».)

Alors $I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k}$

où par hypothèse de récurrence $Z_0, \dots, Z_n$ admettent une espérance.

Par linéarité I_n admet une espérance et

$$E(I_n) = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k E(Z_{n-k})$$
$$= \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}$$

D'après 7.a) Z_{n+1} admet une espérance et

$$z_{n+1} = E(Z_{n+1}) = r_n E(I_n) = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Cl selon le principe de récurrence $z_n = E(Z_n)$ existe pour $\forall\, n \in \mathbb{N}$

et $\boxed{z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}}$

7. Attention les colonnes d'une matrice en Scilab sont numérotées à partir de 1.

Donc Delta(1) représente α_0, Delta(2) représente α_1, etc

```
function r = z(Delta, n)
    z = zeros(1:n+1)        <- [z_0, ... z_n]
    z(1) = 1  // valeur de z_0
    for i = 1:n
        s = 0
        for k = 0 : min(i-1, d)        <- alpha_k
            s = s + Delta(k+1) * z(i-k)        <- z_{i-k-1}
        end
        z(i+1) = (i+1)/i * s )   <- z_i = lambda_{i-1} sum_{k=0}^{min(i-1, d)} alpha_k z_{i-1-k}
    end
    r = z(n+1)
endfunction
```

calcul de z_i

9. Pour $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \subset U_n \cup V_n$

donc $\mathbb{P}(U_n) \leq \mathbb{P}(U_n \cup V_n) \leq 1$ car c'est une probabilité

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = 1$ donc selon le terme de l'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cup V_n) = 1$

De plus $\mathbb{P}(U_n \cup V_n) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}(U_n \cap V_n)$

il vient $\mathbb{P}(U_n \cap V_n) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}(U_n \cup V_n)$

Enfin $\lim \mathbb{P}(U_n) = \lim \mathbb{P}(V_n) = \lim \mathbb{P}(U_n \cup V_n) = 1$

cl $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1 + 1 - 1 = 1}$

10. a) $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} (Z_k = 0)$ signifie qu'il n'y aucune personne infectée à partir du $n^{ème}$ jour.

B est réalisé si A_n l'est à un moment donné.

Donc $B = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ (il n'y a aucune infection à partir du $0^{ème}$ jour ou à partir du 1^{er} jour ou etc. indéfiniment)

Les A_n forment une suite croissante d'événements car si il n'y a aucune infection à partir du $n^{ème}$ jour alors il n'y en a pas à partir du $(n+1)^{ème}$ jour.

$\Leftarrow$ par le thme de la limite monotone

$$\boxed{P(B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$$

b) soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\geq d$

- Si $P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)=0$

Alors il n'y a aucune infection pendant d jours d'affilé,
comme une personne reste contagieuse pendant d jours
la contamination s'éteint et

$$\text{pour } p\geq d \quad P\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}(Z_k=0)\right)=0$$

- Si $P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)\neq 0$

Alors pour $p\geq d$

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}(Z_k=0)\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\cap\bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}(Z_k=0)\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)\cdot P_{\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)}\left(\bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}(Z_k=0)\right)$$

probas composées

or si il n'y a aucune infection lors de d jours d'affilé
alors la contamination s'éteint donc

$$P_{\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)}\left(\bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}(Z_k=0)\right)=1$$

et $P\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}(Z_k=0)\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)$

$\Leftarrow$ l'égalité a bien été démontrée dans les deux cas.

Enfin $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty}(Z_k=0)\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n}^{n+p}(Z_k=0)\right)$

comme pour $\forall p \geq d$ $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}(Z_k=0)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)$

on en déduit $\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right)}$ pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) D'après 10.a) $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ donc B est presque sûr si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$

($\Rightarrow$) Si $\lim \mathbb{P}(A_n) = 1$

alors $\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0) \subset (Z_n=0)$

donc $\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(Z_n=0) \leq 1$ ← probabilité

et selon le théorème de l'encadrement $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n=0) = 1$

($\Leftarrow$) Si $\lim \mathbb{P}(Z_n=0) = 1$

alors $\lim \mathbb{P}(Z_n=0) = \lim \mathbb{P}(Z_{n+1}=0) = \dots = \lim \mathbb{P}(Z_{n+d}=0) = 1$

donc d'après 9.

$\lim \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}(Z_k=0)\right) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$

$\underline{\text{Ḉ}}$ par double implication $\boxed{B \text{ est presque sûr ssi } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n=0) = 1}$

d) Rappel

Une suite (Z_n) de variables aléatoires discrètes converge en loi vers une VA Z si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n=k) = \mathbb{P}(Z=k)$$

or par propriété des variables aléatoires, lorsque $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n=0)=1$

alors pour $\forall\, k\neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n=k)=0$

B est presque sûr (ssi) $\forall k\in\mathbb{N}$ $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n=k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k\neq 0 \end{cases}$

(ssi) (Z_n) converge en loi vers la VA constante égale à 0.

11.a) On utilise l'égalité (1) énoncée en 2.c)

D'après les hypothèses $Z_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{P}(Y_n)$

donc $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$ pour $\forall\, t\in J$ et $g_0(t) = \mathbb{P}(X_t=0) = e^{-t}\cdot\frac{t^0}{0!} = e^{-t}$

Donc selon (1) $\boxed{\mathbb{P}(Z_{n+1}=0) = \mathbb{E}(g_0(Y_n)) = \mathbb{E}(e^{-Y_n})}$ pour $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) <u>On commence par m.q</u> <u>$\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{-x}\geq 1-x$</u>

Posons $h(x) = e^{-x}-1+x$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions usuelles dérivables et

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad h'(x) = -e^{-x}+1$$

$h'(x)>0 \iff -e^{-x}+1>0$
$\iff e^{-x}<1$
$\iff -x<0$
$\iff x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h(0) = 1-1 = 0$ donc le minimum de h est 0

i.e. $\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{-x}-1+x\geq 0$ donc $\boxed{e^{-x}\geq 1-x}$

Par croissance de l'espérance on a donc ; pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=0) = \mathbb{E}(e^{-Y_n}) \geq 1-\mathbb{E}(Y_n)$$

or d'après 7.a) $E(Y_n) = E(Z_n) = z_n$

Il vient $\quad 1 - z_n \leq P(Z_{n+1} = 0) \leq 1$ car c'est une probabilité

Par hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0$ donc selon le théorème de l'encadrement

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_{n+1} = 0) = 1$

Or d'après 10.c) on en déduit que $\boxed{\text{B est presque sûr.}}$

BILAN

Cette deuxième partie était particulièrement difficile et abstraite. Très peu de questions auront été abordées par les candidats. On pouvait récupérer quelques points en 7,a), 9, 10.d) et il fallait bien sûr montrer l'inégalité facile $e^{-x} \geq 1 - x$.

PARTIE 3

12. a) $\sum\limits_{k=0}^{d} a_k t^{d-k} = \sum\limits_{k=0}^{d} \frac{\alpha_k}{\alpha} t^{d-k} = \frac{1}{\alpha} \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k t^{d-k}$

$\lim\limits_{t \to 1} t^{d-k} = 1$ donc $\lim\limits_{t \to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k t^{d-k} = \frac{1}{\alpha} \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$

Or par définition $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$ donc $\boxed{\lim\limits_{t \to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k t^{d-k} = 1}$

b) Supposons que l'inégalité proposée n'est vraie pour aucun $\theta \in]0,1[$.

C'est-à-dire que $\forall \theta \in]0,1[\quad \theta^{d+1} < \rho \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}$

On fait tendre θ vers 1. On obtient d'après 12.a)

$1 \leq \rho \times 1$ attention au passage à l'inégalité large.

c'est absurde car par hypothèse $\rho < 1$

cqfd par l'absurde il existe $\theta \in]0,1[$ tq

$$\theta^{d+1} \geq \rho \sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}$$

b) Soit $P(n)$ la propriété « $z_n \leq M\theta^n$ »

. Initialisation

$$M = \max_{k \in [\![N, N+d]\!]} \frac{z_k}{\theta^k} \quad \text{donc si } k \in [\![N, N+d]\!] \ \frac{z_k}{\theta^k} \leq M$$

$$\text{puis } z_k \leq M\theta^k$$

La propriété est donc vrai aux rangs N à $N+d$

. Hérédité

Soit $n \geq N+d$ fixé.

Supposons que $P(N), P(N+1), \dots, P(n)$ sont vraies.

D'après 7.b)

$$\left.\begin{aligned} z_{n+1} &= r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \\ &= r_n \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot \alpha z_{n-k} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{car } a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha} \\ &\text{et car } n \geq d \end{aligned}$$

$$= \alpha r_n \sum_{k=0}^{d} a_k z_{n-k}$$

. $k \in [\![0, d]\!]$ et $n \geq N+d$ donc $n-k \geq N$ selon les hypothèses de récurrence on a donc

$$z_{n-k} \leq M\theta^{n-k}$$

. par hypothèse de l'énoncé $\alpha r_n \leq \rho$

de ces deux points $z_{n+1} \leq \rho \sum_{k=0}^{d} a_k M\theta^{n-k}$

$$\leq \rho M \sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \times \theta^{n-d}$$

$$\leq M\theta^{n-d} \cdot \rho \sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}$$

j'applique l'inégalité 12.a) pour en déduire

$$z_{n+1} \leq M\theta^{n-d} \times \theta^{d+1} = M\theta^{n+1}$$

donc $P(n+1)$ est vraie

cl selon le principe de récurrence $\boxed{\forall n \geq N \quad z_n \leq M\theta^n}$

c) pour $\forall n \in \mathbb{N}$ z_n est l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives donc

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq z_n \leq M\theta^n$$

$\theta \in]0,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \theta^n = 0$

cl selon le thme de l'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0}$

13.a) Soit $n \in \mathbb{N}$ on a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_n \\ \vdots \\ z_{n+1-d} \end{pmatrix}$

avec d'après 7.b) $z_{n+1} = r_n \sum\limits_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}$ avec l'hypothèse $z_{-1} = \dots = z_{-d} = 0$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k z_{n-k}$$

$r_n = \frac{1}{\alpha}$

$$= \sum_{k=0}^{d} \frac{\alpha_k}{\alpha} z_{n-k} = \sum_{k=0}^{d} a_k z_{n-k}$$

Dès lors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 z_n + a_1 z_{n-1} + \dots + a_d z_{n-d} \\ z_n \\ z_{n-1} \\ \dots \\ z_{n+1-d} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_d \\ 1 & & (0) & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ (0) & & \ddots \; 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

c) Si on pose $A=\begin{pmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & a_d \\ 1 & \ddots & (0) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} = AU_n$

b) Soit $P(n)$ la propriété " $U_n = A^n U_0$ "

• Initialisation

$U_0 = A^0 U_0$ est vraie car $A^0 = I$

• Hérédité

Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n \\ &= A.A^n U_0 \quad \text{HdR} \\ &= A^{n+1} U_0 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie

• cc par récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = A^n U_0}$

D'après 7.b) $z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{d} \alpha_k z_{n-k} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k z_{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k z_{n-k}$$

$$= (a_0 \ \cdots \ a_d) \times \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

on a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = LU_n = LA^n U_0}$

14. a) On a ici $A = \begin{pmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad rg(A - \lambda I_3) = rg \begin{pmatrix} 1/6 - \lambda & 2/3 & 1/6 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{6}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}-\lambda(\frac{1}{6}-\lambda) & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - (\frac{1}{6}-\lambda)L_1$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2-\frac{1}{6}\lambda+\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$= rg \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + \frac{2}{3})L_2$$

avec $\beta = \frac{1}{6} + \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + \frac{2}{3}\right) = \lambda^3 - \frac{1}{6}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{6}$

on remarque que $(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})(\lambda+\frac{1}{3}) = (\lambda-1)\left(\lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6}\right)$

$$= \lambda^3 - \frac{1}{6}\lambda + \frac{2}{3}\lambda + 6 = \beta$$

Cc λ est VP de A ssi $rg(A - \lambda I_3) < 3$

ssi $\beta = 0$

ssi $\lambda = 1$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$ ou $\lambda = -\frac{1}{3}$

$$\boxed{Sp(A) = \{1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}\}}$$

b) • Déterminons E_1

$E_1 = \ker(A - I_3)$ avec $A - I_3 = \begin{pmatrix} -5/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad X \in E_1 \iff (A - I_3)X = 0$

$$\iff \begin{cases} -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x=y \\ y=z \end{cases}$$

$\underline{\text{cl}}$ $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(V_1)$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

donc (V_1) est une base de $E_1(A)$

. de même on trouve $E_{-1/2}(A) = \text{Vect}(V_2)$ avec $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0$

et $E_{-1/3}(A) = \text{Vect}(V_3)$ avec $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \neq 0$

A admet 3 VP distinctes donc elle est diagonalisable et (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de A.

c) $U_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ z_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on cherche s_1, s_2, s_3 tq $s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3 = U_0$ (E)

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 1 \\ s_1 - 2s_2 - 3s_3 = 0 \\ s_1 + 4s_2 + 9s_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 1 \\ -3s_2 - 4s_3 = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3s_2 + 8s_3 = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 1 \\ -3s_2 - 4s_3 = -1 \\ 4s_3 = -2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = 1/2 \\ s_2 = 1 \\ s_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\underline{\text{cl}}$ $\boxed{U_0 = \frac{1}{2} V_1 + V_2 - \frac{1}{2} V_3}$

d) D'après les questions précédentes, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

et $D = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & -1/2 & \\ (0) & & -1/3 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = D$

donc $A = PDP^{-1}$

Une récurrence très classique montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$

Je déduis de 13.b) que $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_{n+1} = LPD^nP^{-1}U_0$

on a donc : $z_{n+1} = LPD^nP^{-1}(s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3)$

$= s_1 LPD^nP^{-1}V_1 + s_2 LPD^nP^{-1}V_2 + s_3 LPD^nP^{-1}V_3$

or P est la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à (V_1, V_2, V_3). Donc par formule de changement de base

$P^{-1}V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P^{-1}V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P^{-1}V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

De plus $D^n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & (-1/2)^n & \\ (0) & & (-1/3)^n \end{pmatrix}$ pour tt $n \in \mathbb{N}$

donc $D^nP^{-1}V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $D^nP^{-1}V_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $D^nP^{-1}V_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Il vient : $z_{n+1} = s_1 LP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n s_2 LP\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n LP\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} z_{n+1} = s_1 LP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= s_1 LV_1$

$= s_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= s_1 \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$

$= s_1$

Cl $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = s_1}$

15. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_{d+1}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_0-\lambda & a_1 & \cdots & a_d \\ 1 & -\lambda & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ (0) & & 1 & -\lambda \\ a_0-\lambda & a_1 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$$ on a descendu en dernier la 1ère ligne

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ (0) & & 1 & -\lambda \\ 0 & a_1+(a_0-\lambda)\lambda & \cdots & a_d \end{pmatrix}$$ $L_{d+1} \leftarrow L_{d+1} - (a_0-\lambda)L_1$

on refait la même opération à partir de L_2 puis L_3 et ainsi de suite

on obtient

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_{d+1}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

avec $\beta = a_d + \lambda\left[a_{d-1} + \lambda(a_{d-2} + \lambda(\ldots(a_1+(a_0-\lambda)\lambda)\right]$

$= a_d + \lambda a_{d-1} + \lambda^2 a_{d-2} + \cdots + \lambda^{d-1} a_1 + \lambda^d a_0 - \lambda^{d+1}$

λ est VP de A ssi $\operatorname{rg}(A-\lambda I_{d+1}) < d+1$

ssi $\beta = 0$

ssi $\lambda^{d+1} = a_d + \lambda a_{d-1} + \cdots \lambda^d a_0$

cl $\boxed{\lambda \text{ est VP de } A \text{ ssi } \lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^{d-k}}$

b) $\lambda = 1$ vérifie l'équation précédente. En effet

$$1^{d+1} = 1$$

$$\text{et } \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} 1^k = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \quad \swarrow i = d-k$$
$$= \sum_{i=0}^{d} a_i$$
$$= 1 \quad \text{(d'après un calcul de 12.a))}$$

donc $\boxed{1 \in Sp(A)}$

En utilisant judicieusement le calcul de l'exemple 14.b)

on pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ on remarque que $AV = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + \dots a_d \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = V$

ie V est un vecteur propre associé à la VP 1 et la somme de ses coefficients est bien égale à $d+1$

c) D'après a) $\lambda \in Sp(A) \iff \lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \lambda^k$

$$\iff 1 = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \frac{\lambda^k}{\lambda^{d+1}}$$

$$\iff 1 = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d+1-k}$$

or $\sum_{k=0}^{d} a_{d-k} = \sum_{i=0}^{d} a_i = 1$ et les a_i appartiennent à $]0,1[$.

- Si $\lambda = -1$ alors $\sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d+1-k} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} (-1)^{d+1-k}$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d+1-k} < \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} = 1$$

donc $\boxed{-1 \notin Sp(A)}$

• <u>de même si $\lambda > 1$</u> alors $\frac{1}{\lambda} < 1$ donc $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d+1-k} < 1$

il vient $\sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d+1-k} < \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} = 1$

donc $\lambda \notin Sp(A)$

• <u>Enfin si $\lambda < -1$</u>

alors $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \lambda^{k}$

$\Leftrightarrow \lambda = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d-k}$

or $\lambda < -1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} > -1$ donc $\sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{d-k} > -\sum_{k=0}^{d} a_{d-k} = -1$

alors que $\lambda < -1$

donc $\lambda \notin Sp(A)$

cl $\boxed{\text{si } \lambda = -1 \text{ ou } |\lambda| > 1 \text{ alors } \lambda \notin Sp(A)}$

16. a) $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_d \\ 1 & & (0) & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ où <u>on suppose que $W \in H$</u>

donc $AW = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{d} a_i w_i \\ w_0 \\ \vdots \\ w_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_0 \\ w'_1 \\ \vdots \\ w'_d \end{pmatrix}$

Alors $AW \in H \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{d} b_k w'_k = 0$

terme en 0

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{d} b_k \underbrace{w_{k-1}}_{w'_k} + b_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{d} a_i w_i}_{w'_0} = 0$

$j = k-1$

$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{d-1} b_{j+1} w_j + b_0 \sum_{i=0}^{d} a_i w_i = 0$

or $b_{j+1} = \sum_{i=j+1}^{d} a_i = \sum_{i=j}^{d} a_i - \underbrace{a_j}_{\text{terme en } j} = b_j - a_j$

donc $AW \in H \iff \sum_{j=0}^{d-1} (b_j - a_j) w_j + b_0 \sum_{i=0}^{d} a_i w_i = 0$

$\iff \sum_{j=0}^{d-1} b_j w_j - \sum_{j=0}^{d-1} a_j w_j + b_0 \sum_{i=0}^{d} a_i w_i = 0$

or $W \in H$ donc $\sum_{j=0}^{d} b_j w_j = 0$ donc $\sum_{j=0}^{d-1} b_j w_j = -\underbrace{b_d w_d}_{\text{terme en } d}$

$= -a_d w_d$

Dès lors $AW \in H \iff -a_d w_d - \sum_{j=0}^{d-1} a_j w_j + b_0 \sum_{i=0}^{d} a_i w_i = 0$

terme en d $\iff -\sum_{j=0}^{d} a_j w_j + b_0 \sum_{i=0}^{d} a_i w_i = 0$

enfin $b_0 = \sum_{k=0}^{d} a_k = 1$ donc cette égalité est vraie

cl $\boxed{\text{Si } W \in H \text{ alors } AW \in H}$

b) $U_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ \vdots \\ z_{-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $U_0 - sV = \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ \vdots \\ -s \end{pmatrix}$

on a donc $U_0 - sV \in H \iff \sum_{k=0}^{d} b_k w_k = 0$ avec $\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ \vdots \\ -s \end{pmatrix}$

$\iff b_0(1-s) + \sum_{k=1}^{d} b_k(-s) = 0$

$\iff 1 - s - s\sum_{k=1}^{d} b_k = 0$ car $b_0 = 1$

$\iff 1 - s\left(1 + \sum_{k=1}^{d} b_k\right) = 0$

$\iff s = \dfrac{1}{1 + \sum_{k=1}^{d} b_k} = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{d} b_k}$ car $b_0 = 1$

cl si $s = \frac{1}{\sum_{k=0}^{d} b_k}$ alors $U_0 - sV \in H$

c) Pour $\forall W \in H$ on admet que $LA^n W \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

en prenant $W = U_0 - sV$ il vient :

$$LA^n(U_0 - sV) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $LA^n(U_0 - sV) = LA^n U_0 - s LA^n V$

$= z_{n+1} - s LA^n V$ d'après 13.b)

Enfin V est un vecteur propre de A associé à la VP 1 donc

$AV = V$ puis $A^2 V = AV = V$ et par une récurrence immédiate

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A^n V = V$

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $LA^n(U_0 - sV) = z_{n+1} - sLV$

avec $LV = (a_0 \dots a_d)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_0 + a_1 + \dots + a_d = 1$

on a donc $z_{n+1} - s = LA^n(U_0 - sV) \longrightarrow 0$

cl $\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = s}$

17. • Si (H_2) ou (H_3) est réalisé alors $\lim_{n\to+\infty} z_n \neq 0$ d'après 16.c)

et la remarque admise en 12.c)

Dans ce cas $\sum_{n\geq 0} z_n$ diverge grossièrement

• Si (H_1) est réalisée alors il existe $\theta \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq N \quad z_n \leq M\theta_n \quad (12.b))$$

- $0<\theta<1$ donc $\sum_{n\geq 0} \theta^n$ converge (série géométrique)
- la série est ATP

cf par le lemme de comparaison $\sum_{n\geq 0} z_n$ converge.

La série $\sum_{n\geq 0} z_n$ converge seulement sous l'hypothèse (H_1).

Dans ce cas la somme du nombre moyen de personnes contaminés par jour est finie. On peut en déduire que l'épidémie épargnera une partie de la population.

BILAN

Cette troisième partie était elle aussi très difficile. On pouvait récupérer quelques points en 12.c) et 13.b).
La question 14 était classique mais il fallait avoir trouvé la matrice A. C'est dommage qu'elle n'ait pas été donnée.
Les questions 15 et 16 étaient particulièrement techniques et n'auront presque jamais abordées. On pouvait finir en traitant 16.c) et 17.

BILAN général

Le sujet était très interessant et reprennait des articles mathématiques récents liés à l'étude de l'épidémie de COVID 19.
Il était particulièrement difficile et peu accessible aux étudiants qui n'ont pas travaillé régulièrement les sujets A.
A mon avis, un étudiant qui aura fait une partie significative de la partie I aura une très bonne note.