— LYON 2021 —

PROBLÈME 1

PARTIE A

1. • φ est continue sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions usuelles continues.

• Etude en 1

$\varphi(1) = 1$

calculons $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x + (1-x)\ln(1-x)$

Je pose $h = 1-x$ ie $x = 1-h$; $x \to 1$ donc $h \to 0$

Il vient $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{h\to 0} 1 - h + h\ln(h)$

$= 1$ car $\lim\limits_{h\to 0} h\ln(h) = 0$ selon le thme de croissances comparées (TCC)

$\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = \varphi(1)$ donc φ est continue en 1

cl des 2 points précédents $\boxed{\varphi \text{ est continue sur }]-\infty, 1]}$

2. a) φ est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ en tant que produit et somme de fonctions de classe C^1

et $\forall x \in]-\infty, 1[$ $\varphi'(x) = 1 + (-1)\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x}$

$= 1 - \ln(1-x) - 1$

$= -\ln(1-x)$

cl $\boxed{\forall x \in]-\infty, 1[\quad \varphi'(x) = -\ln(1-x)}$

b) soit $x \in]-\infty, 1[$ $\varphi'(x) > 0 \iff -\ln(1-x) > 0$

$\iff \ln(1-x) < 0$

$\iff 1 - x < e^0$ } car exp est strict. croissante

donc $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x < 1$
$\Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	1

$\varphi(0) = 0 + 1 \times \ln(1) = 0$

c) Pour étudier la dérivabilité de φ en 1 j'étudie le taux d'accroissement :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \frac{x+(1-x)\ln(1-x) - 1}{x-1}$$
$$= \frac{x-1+(1-x)\ln(1-x)}{x-1}$$
car $1-x = -(x-1)$
$$= \frac{(x-1)(1-\ln(1-x))}{x-1}$$
$$= 1 - \ln(1-x)$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 1-x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = +\infty$ donc <u>φ n'est pas dérivable en 1</u> et la courbe de φ <u>admet au point $(1,1)$ une tangente verticale</u>

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} 1-x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(1-x) = +\infty$

il y a donc une forme indéterminée.

Je factorise par $1-x$:
$$\varphi(x) = (1-x)\left[\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right]$$

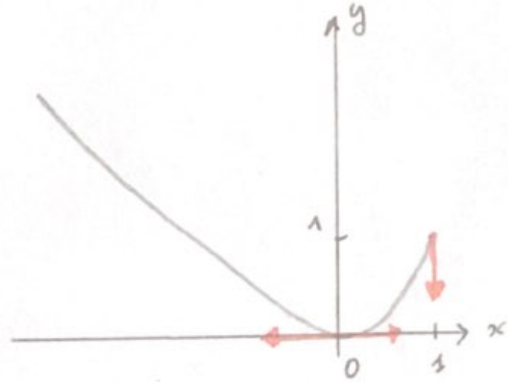
- $\frac{x}{1-x} \underset{-\infty}{\sim} \frac{-x}{-x} \sim -1$ et $\ln(1-x) \to +\infty$ donc $\frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \to +\infty$
- $1-x \to +\infty$

par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \varphi(x) = +\infty}$

4. On a :

x	$-\infty$		0		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$
	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

D'après les points précédents, il y a une tangente horizontale en $(0,0)$ et une (demi)-tangente verticale en $(1,1)$.
L'étude de la convexité n'ayant pas été faite je ne connais pas l'allure de la branche infinie en $-\infty$.



5. a) $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale est impropre en 0.
Je pose $I(A) = \int_A^1 t\ln(t)\,dt$ avec $A \in]0,1]$

Posons $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = t^2/2 \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $]0,1]$ donc par Intégration par parties (IPP)

$$I(A) = \left[\ln(t)\cdot\frac{t^2}{2}\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2}{2}\,dt$$
$$= \ln(1)\cdot\frac{1}{2} - \ln(A)\cdot\frac{A^2}{2} - \frac{1}{2}\int_A^1 t\,dt$$
$$= 0 - \frac{1}{2}A^2\ln(A) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_A^1$$
$$= -\frac{1}{2}A^2\ln(A) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{A^2}{2}\right)$$

$\lim_{A\to 0} A^2\ln(A) = 0$ (selon le TCC) donc $\lim_{A\to 0} I(A) = -\frac{1}{4}$

cc $\boxed{\int_0^1 t\ln(t)\,dt \text{ converge et est égale à } -\frac{1}{4}}$

b) φ est continue sur $]-\infty, 1]$ donc $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ est bien définie.

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 [x + (1-x)\ln(1-x)]\,dx$$
$$= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 (1-x)\ln(1-x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)\ln(1-x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 (1-x)\ln(1-x)\,dx$$

- je pose $t = 1-x$ ie $x = 1-t$
- je cherche α et β tq $\begin{cases} 1-\alpha = 0 \\ 1-\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$
- $t \mapsto 1-t$ est C^1 sur $[0,1]$
- je dérive x par rapport à t. $\frac{dx}{dt} = -1$ donc $dx = -dt$

Il vient $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2} + \int_1^0 t\ln(t)(-dt)$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 t\ln(t)\,dt \quad \text{chasles}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \quad \text{d'après 5.a)}$$

cl $\boxed{\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}}$

PARTIE B

6. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = t^0 \times \frac{1-t^n}{1-t} \quad \text{(somme de termes géométriques) avec } t \neq 1$$
$$= \frac{1-t^n}{1-t}$$

Il vient $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1-1+t^n}{1-t} = \frac{t^n}{1-t}$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall t \in [0, x] \ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}}$

b) J'intègre termes à termes l'égalité de a) :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$$

linéarité

donc $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k\, dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$

puis $\displaystyle\left[-\ln(|1-t|)\right]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$

c'est-à-dire $\displaystyle -\ln(1-x) + \ln(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$

car $1-x>0$

Enfin, je fais le changement d'indice $i=k+1$

cqfd $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt}$

7. $0 \leq t \leq x \iff -x \leq -t \leq 0$ $\quad +1$

$\iff 1-x \leq 1-t \leq 1$ $\quad$ inverse

$\iff 1 \leq \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x}$ $\quad \times t^n > 0$

$\iff t^n \leq \dfrac{t^n}{1-t} \leq \dfrac{t^n}{1-x}$

J'intègre termes à termes (bornes dans le bon sens)

$$0 \leq \int_0^x t^n\, dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\, dt$$

linéarité

donc $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\, dt$

Enfin, $\displaystyle\int_0^x t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

cqfd $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \leq \frac{1}{1-x}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{(1-x)(n+1)}}$

car $x \leq 1$ donc $x^{n+1} \leq 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(1-x)} = 0$ donc selon le thme de l'encadrement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0}$$

8. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ pour $n \geqslant 1$

D'après 6.b) $S_n = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

D'après 7. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$

cl $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(1-x)$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

9. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \iff \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}$

$$\iff \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

il suffit de prendre $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$

b) Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$ pour $n \geqslant 1$

D'après 9. a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$x^{k+1} = x^k . x$ $\quad$ $i = k+1$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{x^i}{i}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \Big[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^i}{i} - \underbrace{x}_{\text{terme en } 1}\Big]$$

D'après 8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = x \times (-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x) - x)$

$= -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x$

$= x + (1-x)\ln(1-x)$

$\underline{\underline{\text{ie}}}$ $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)}$

10. Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \geq 1$

D'après 9. a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$) $i = k+1$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$) télescopage

Dès lors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$

$\underline{\underline{\text{ie}}}$ $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge et } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 = \varphi(1)}$

PARTIE C

11. a) J'introduis les événements :

- B_k "tirer une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage"
- R_k "tirer une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage"

$P(N=2) = P(R_2)$

$= \frac{1}{2}$

$P(N=3) = P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) P_{B_1}(R_2)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2\times 3}$

de même $P(N=4) = P(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$

$= P(B_1) P_{B_1}(B_2) \cdot P_{B_1 \cap B_2}(R_3)$ } formule des probabilités composées.

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \times 4}$

Plus généralement, pour $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

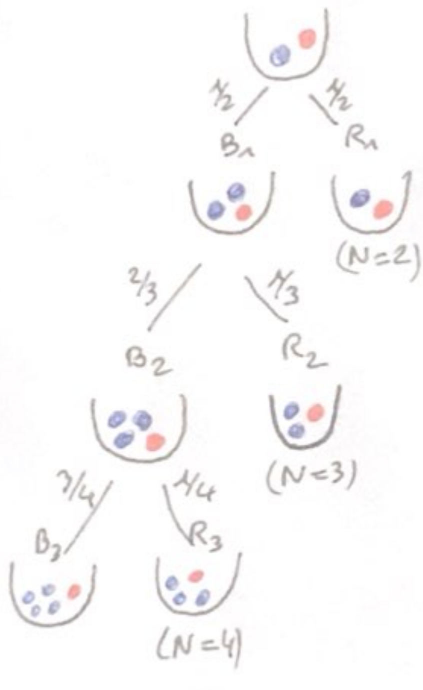
$$P(N=n) = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1})$$

$$= P(B_1) P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}}(R_{n-1})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1) \times n}$$

Cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ P(N=n) = \frac{1}{(n-1)n}}$

Rmq on visualise bien l'expérience en faisant un arbre :



b) • $nP(N=n) = \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$

• on reconnait une série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ DVGTE

• les séries sont ATP

Cl par le terme de comparaison T n'admet pas d'espérance

12.
```
function N = simuleN()
    b=1
    while rand() < b/(b+1)   // il y a b boules bleues et 1 rouge.
        b=b+1   // si je tire une bleue, j'en ajoute une
    end
    N=b+1   // le nbre de boule est le nbre de boules bleues
endfunction   plus 1 (la boule rouge)
```

13. a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$P_{(N=n)}(T \leq x) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$$
$$= P((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x))$$
$$= P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x) \quad \text{indépendance}$$
$$= \underbrace{F(x) \times \dots \times F(x)}_{n \text{ fois}} \quad \text{car les } X_i \text{ ont la même loi}$$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad P_{(N=n)}(T \leq x) = (F(x))^n}$

b) Les événements $(N=n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ forment un système complet d'événements (SCE), selon la formule des probabilités totales :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(T \leq x) = \sum_{n=2}^{+\infty} P((N=n) \cap (T \leq x))$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} P(N=n) P_{(N=n)}(T \leq x)$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} (F(x))^n$$

je pose $m = n-1$ ie $n = m+1$; m varie de 1 à $+\infty$ donc

$$P(T \leq x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{m+1}}{m(m+1)}$$
$$= \varphi(F(x)) \quad \text{d'après 9.a)}$$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad P(T \leq x) = \varphi(F(x))}$

14. a)

```
function T=simuleT()
    n=simuleN() // je simule la variable aléatoire N
    X=grand(1,n,"unf",0,1) // je simule X1,...,Xn
    T=max(X)
endfunction
```

b) La fonction mystere simule 1000 fois la variable T et ce 3 fois de suite. Elle renvoie les 3 valeurs moyennes obtenues.

Je conjecture que T admet une espérance et que $E(T) = 0{,}75 = \frac{3}{4}$

c) Les variables aléatoires X_n suivent une loi $\mathcal{U}([0,1[)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = x & \text{si } x \in [0,1[\\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Dès lors $P(T \leq x) = \varphi(F(x)) = \begin{cases} \varphi(0) & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ \varphi(1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$ Notons $F_T(x) = P(T \leq x)$

d) • F_T est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) ; sur $[0,1[$ (d'après la partie a)) et sur $[1, +\infty[$ (fonction constante)

• $\lim\limits_{x \to 0^-} F_T(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} F_T(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0) = 0$

et $F_T(0) = \varphi(0) = 0$ donc F_T est continue en 0

• $\lim\limits_{x \to 1^-} F_T(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = \varphi(1) = 1$ (car φ est continue)

$\lim\limits_{x \to 1^+} F_T(x) = 1$ et $F_T(1) = 1$ donc F_T est continue en 1

* Des 3 points précédents F_T est continue sur $\mathbb{R}$

* F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et 1 car φ est de classe C^1 sur $]0,1[$ (cf Partie A)

cl $\boxed{T \text{ est une variable à densité}}$

c) Une densité de T est donnée par F_T' là où F_T est dérivable c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \quad f_T(x) = F_T'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \varphi'(x) & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

on complète par une valeur positive en 0 et 1.

Ainsi une densité de T est $\begin{cases} f_T(x) = -\ln(1-x) & \text{si } x \in]0,1[\quad (\text{cf. } 2.a)) \\ f_T(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

• Existence

$E(T)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\,dt$ converge absolument

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_T(t)|\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 -t\ln(1-t)\,dt}_{I_2} + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0\,dt}_{I_3}$$

I_1 et I_3 convergent et sont nulles.

$t \mapsto t\ln(1-t)$ est continue sur $[0,1[$ donc l'intégrale est impropre en 1.

Posons $I(A) = \int_0^A -t\ln(1-t)\,dt$

je pose $\begin{cases} u(t) = \ln(1-t) \\ v'(t) = -t \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = \frac{-1}{1-t} \\ v(t) = \frac{1-t^2}{2} \end{cases}$

énorme astuce : les primitives étant choisies à une constante près je rajoute $\frac{1}{2}$ pour que mon calcul se simplifie

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1[$ donc par IPP

$$I(A) = \left[\ln(1-t) \times \frac{1-t^2}{2}\right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{1-t} \times \frac{1-t^2}{2}\,dt$$ j'utilise mon astuce

$$= \ln(1-A) \times \frac{(1-A^2)}{2} - 0 + \int_0^A \frac{1}{\cancel{1-t}} \times \frac{(\cancel{1-t})(1+t)}{2}\,dt$$

$$I(A) = \ln(1-A) \times \frac{(1-A)(1+A)}{2} + \int_0^A \frac{1+t}{2}\, dt$$

$$= \ln(1-A) \times \frac{(1-A)(1+A)}{2} + \frac{1}{2}\left[t + \frac{t^2}{2} \right]_0^A$$

$$= \ln(1-A) \times \frac{(1-A)(1+A)}{2} + \frac{1}{2}\left(A + \frac{A^2}{2} - 0\right)$$

$\lim\limits_{A \to 1} \ln(1-A)(1-A) = \lim\limits_{h \to 0} h \ln(h) = 0$ (TCC) (on a posé $h = 1-A$)

donc $\lim\limits_{A \to 1} \ln(1-A) \times \frac{(1-A)(1+A)}{2} = 0$ et $\lim\limits_{A \to 1} I(A) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Cl $\int_0^1 -t \ln(1-t)\, dt$ converge et vaut $\frac{3}{4}$ donc <u>T admet une espérance</u>.

• <u>Calcul</u> $E(T) = \int_{-\infty}^0 0\, dt + \int_0^1 -t \ln(1-t)\, dt + \int_1^{+\infty} 0\, dt$

$= 3/4$

Cl $\boxed{T \text{ admet une espérance et } E(T) = \frac{3}{4}}$

<u>Rmq</u> cette question était d'une difficulté complètement déraisonnable. Je suis curieux de savoir combien de candidats auront réussi à la traiter !

15. a) La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ est :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Dès lors $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(T \leq x) = \varphi(F(x))$

$$= \begin{cases} \varphi(0) & \text{si } x < 0 \\ \varphi(1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(1 - e^{-\lambda x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Enfin $\varphi(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$ si $x<1$

et $1-e^{-\lambda x}<0$ donc

$$\begin{aligned}\varphi(1-e^{-\lambda x}) &= 1-e^{-\lambda x} + (1-(1-e^{-\lambda x}))\ln(1-(1-e^{-\lambda x}))\\ &= 1-e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}\ln(e^{-\lambda x})\\ &= 1-e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}\times(-\lambda x)\end{aligned}$$

cl La fonction de répartition de T est donnée par :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad F_T(x) = P(T\leq x) = \begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x}-\lambda x e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}}$$

c) • F_T est continue sur $]-\infty,0[$ (fonction nulle) et sur $]0,+\infty[$ (somme produit de fct° usuelles continues)

• $\lim\limits_{x\to 0^-} F_T(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} F_T(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1-e^{-\lambda x}-\lambda x e^{-\lambda x} = 1-e^{0} = 0$

et $F_T(0)=0$

donc F_T est continue en 0

* Des deux points précédents <u>F_T est continue sur $\mathbb{R}$</u>

* F_T est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 (mêmes raisons que pour la continuité)

cl <u>T est une variable aléatoire à densité</u>

Une densité de T s'obtient en dérivant F_T là où elle est dérivable

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad F_T'(x) = \begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}-\lambda e^{-\lambda x}+\lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$= \begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

cl en choisissant judicieusement la valeur en 0, on peut dire qu'une densité de T est $\begin{cases} g(x)=0 & \text{si } x<0\\ g(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

d) • $\mathbb{E}(T)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\,dx$ converge absolument.

or $\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x}\,dx$

$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx$

• D'autre part, selon le thme de transfert,

$\lambda \mathbb{E}(X_1^2) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_1}(x)\,dx$

$= \lambda \left[\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{+\infty} x^2 . \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}\,dx \right]$

↳ densité d'une loi exp.

$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x}\,dx$

Enfin $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc X_1 admet un moment d'ordre 2

cl des 2 points précédents on déduit que T admet une espérance et que $\boxed{\mathbb{E}(T) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2)}$

on sait que $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}$

Dès lors, selon Koenig-Huygens $\mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = V(X_1)$

donc $\mathbb{E}(X_1^2) = V(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2$

$= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

cl $\boxed{\mathbb{E}(T) = \lambda . \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}}$

BILAN

- La partie A de ce problème était relativement classique mais certaines questions étaient piègeuses. Les limites n'étaient pas faciles.

- La partie B était accessible et ressemblait à beaucoup d'exercices déjà traités. Mais les calculs étaient assez techniques (en particulier les chgts d'indices dans les questions 6.b) et 9.b))

- Le début de la partie C (question 11 à 13.a)) étaient faisables. Le reste était franchement déraisonnable. Il y avait quand même des points à grapiller (14.c) 14.d) 15.a) et 15.d) deuxième partie)

L'ensemble est assez long et présente trop peu de questions faciles pour permettre aux étudiants sérieux de s'exprimer.

PROBLEME 2

PARTIE A

1. Pour $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ $M(a,b,c)$ est diagonalisable car elle est symétrique.

2. a) Supposons que $M(a,b,c)$ admet une unique valeur propre λ.
Alors comme M est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}M(a,b,c)P = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \lambda & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_3$

on aurait alors $M(a,b,c) = P(\lambda I_3)P^{-1}$
$= \lambda PP^{-1} = \lambda I_3$ ce qui est faux

cl par l'absurde <u>$M(a,b,c)$ ne peut pas avoir une seule valeur propre</u>

b) $M(a,b,c)$ est d'ordre 3 donc elle admet au plus 3 valeurs prs ;
elle est diagonalisable donc elle en a au moins une.
D'après a) elle n'a pas une seule VP.

cl $\boxed{M(a,b,c) \text{ admet soit 2 soit 3 VP}}$

3. a) $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = M(a,b,c)$ on a donc
$$M(a,b,c) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

donc $\begin{cases} f(e_1) = (1+a)e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) = e_1 + (1+b)e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_1 + e_2 + (1+c)e_3 \end{cases}$

dès lors $$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_2) & f(e_1) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

cl $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = M(b,a,c)}$

b) $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ sont les matrices du même endomorphisme dans des bases différentes donc elles ont les mêmes VP.

c) En posant $\mathcal{B}''=(e_1,e_3,e_2)$ on obtient par analogie que $mat_{\mathcal{B}''}(f)=M(a,c,b)$

Par le même raisonnement qu'en b) on en déduit que $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ ont les mêmes valeurs propres.

PARTIE B

4. a) $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ donc $J^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3J$.

on a donc $J^2-3J=\theta$ donc $P=X^2-3X$ est un polynôme annulateur de J.

b) Les valeurs propres possibles de J sont les racines de P.

or $P=X(X-3)$ donc les racines de P sont 0 et 3.

Cl les VP possibles de J sont 0 et 3.

D'après 2-b) $J=M(0,0,0)$ admet 2 ou 3 VP donc les VP de J sont bien 0 et 3

- Déterminons $E_0(J)$

$$E_0(J)=\ker(J)=\{X\in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid JX=\theta\}$$

soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\quad X\in E_0(J)\Leftrightarrow JX=\theta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=0\\x+y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

Le système est de rang 1 il admet donc une infinité de solution à $3-1=2$ paramètres disons y et z

$$X \in E_0(J) \iff \begin{cases} x = -y - z \\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donc $E_0(J) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}\ z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}\ z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

ces deux vecteurs sont non colinéaires donc $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $E_0(J)$

(NB. $E_0(J) \neq \{0\}$ donc cela montre à nouveau que 0 est bien VP de J)

- Déterminons $E_3(J)$

$$E_3(J) = \ker(J - 3I_3) = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (J - 3I_3)X = 0 \}$$

$J - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$X \in E_3(J) \iff (J - 3I_3)X = 0$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 / 3$$

le système est de rang 2 donc il y a une infinité de solutions à 3-2 = 1 paramètre, disons z.

$$X \in E_3(J) \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il vient $E_3(J) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre et c'est donc une base de $E_3(J)$

$(E_3(J) \neq \{0\}$ donc 3 est bien VP de $J)$

c) On sait d'après 1. que J est digonalisable. D'après b) si on pose $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ alors $J = PDP^{-1}$

5. a) Soit $a \in \mathbb{R}$

- $M(a,a,a) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$= J + aI_3$

- d'autre part $P(aI_3 + D)P^{-1} = PaI_3P^{-1} + PDP^{-1}$

$= aPP^{-1} + J$ (d'après 4.c))

$= aI_3 + J$

cl on a bien $\boxed{M(a,a,a) = P(aI_3+D)P^{-1}}$

d) $aI_3 + D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$

et d'après b) $M(a,a,a)$ est semblable à $aI_3 + D$

cl $\underline{M(a,a,a) \text{ admet exactement deux VP : } a \text{ et } a+3}$

c) $M(a,a,a)$ est inversible ssi 0 n'est pas VP de $M(a,a,a)$
ssi $a \neq 0$ et $a+3 \neq 0$

Or (*) énonce que $M(a,a,a)$ est inversible ssi $a^2 + a^2 + a^2 + a^3 \neq 0$
ssi $3a^2 + a^3 \neq 0$
ssi $a^2(3+a) \neq 0$
ssi $a \neq 0 \quad a+3 \neq 0$

cl $\underline{\text{La ppté (*) est bien vérifiée par } M(a,a,a)}$

PARTIE C

6. a) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$

C n'est pas inversible car elle admet deux colonnes identiques.

donc $\boxed{0 \text{ est VP de } C}$

b) i) Soit $\lambda \neq 0$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$CX = \lambda X \iff \begin{cases} x+y+z = \lambda x \\ x+y+z = \lambda y \\ x+y+(1+c)z = \lambda z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x+y+z = \lambda x \\ \lambda x = \lambda y & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x+y+(1+c)z = \lambda z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=\lambda x \\ x=y \qquad (\text{car } \lambda\neq 0) \\ x+y+(1+c)z=\lambda z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x+z=\lambda x \qquad (\text{en remplaçant } x \text{ par } y) \\ 2x+(1+c)z=\lambda z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=(\lambda-2)x \\ 2x+(1+c)(\lambda-2)x=\lambda(\lambda-2)x \end{cases}$$

en remplaçant z par $(\lambda-2)x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=(\lambda-2)x \\ x(2+(1+c)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-2))=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=(\lambda-2)x \\ x(2+\lambda(1+c)-2(1+c)-\lambda^2+2\lambda)=0 \end{cases}$$

ccl $\boxed{CX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=(\lambda-2)x \\ x(-\lambda^2+(c+3)\lambda-2c)=0 \end{cases}}$

ii) λ est VP de C ssi l'équation $CX=\lambda X$ admet une solution non nulle

ssi le système ci dessus est de rang <3

ssi $\lambda^2-(c+3)\lambda+2c=0$

c) • on sait déjà que 0 est VP de C d'après a)

• Si $\lambda\neq 0$ λ est VP de C ssi $\lambda^2-(c+3)\lambda+2c=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (c+3)^2-4\times 2c \\ &= c^2+6c+9-8\lambda \\ &= c^2-2c+9 \end{aligned}$$

L'équation du 2^{nd} degré admet deux solutions distinctes à condition que $\Delta>0$.

Je remarque que Δ est lui-même un trinôme du 2nd degré de discriminant $(-2)^2-4\times 9=-32<0$

Donc quelque soit la valeur de c $\Delta>0$ et l'équation $\lambda^2-(c+3)\lambda+2c=0$ admet deux solutions.

Enfin $\lambda=0$ n'est pas solution car $c\neq 0$

cl $\boxed{C \text{ admet 3 valeurs propres distinctes}}$: 0 et les 2 solutions de l'équation $\lambda^2-(c+3)\lambda+2c=0$

7.a) $M(a,a,c)=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{pmatrix}$

et $M(0,0,c-a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+c-a\end{pmatrix}$

je remarque que $M(a,a,c)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+c-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$

cl $\boxed{M(a,a,c)=aI_3+M(0,0,c-a)}$

b) Si on note $C=M(0,0,c-a)$; on a $c\neq a$ donc $c-a\neq 0$ donc d'après 6.c) C admet 3 VP distinctes et d'après 1 elle est diagonalisable.

Il existe donc $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \lambda_3\end{pmatrix}$ avec $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ distinctes

et P inversible telle que $C=PDP^{-1}$

Le même raisonnement qu'en 5.a) permet alors de déduire de 7.a) que

$$M(a,a,c)=P(aI_3+D)P^{-1}$$

$M(a,a,c)$ est donc semblable à $\begin{pmatrix}a+\lambda_1 & & (0)\\ & a+\lambda_2 & \\ (0) & & a+\lambda_3\end{pmatrix}=aI_3+D$

cl $\boxed{M(a,a,c) \text{ admet 3 VP distincts}}$

c) (∗) énonce que $M(a,a,c)$ est inversible ssi $a^2+ac+ac+a^2c \neq 0$

ssi $a^2+2ac+a^2c \neq 0$

ssi $a(a+2c+ac) \neq 0$

ssi $a \neq 0$ et $a+2c+ac \neq 0$

D'autre part $M(a,a,c)$ admet 3 VP d'après 7.b) qui sont $a+\lambda_1, a+\lambda_2, a+\lambda_3$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les VP de $M(0,0,c-a)$.

D'après 6.a) on a donc $\lambda_1 = 0$ et λ_2 et λ_3 sont les solution de l'équation $\lambda^2-(c-a)\lambda+2(c-a)=0$

$M(a,a,c)$ est inversible ssi 0 n'est pas VP de $M(a,a,c)$

ssi $a+\lambda_1 \neq 0$; $a+\lambda_2 \neq 0$; $a+\lambda_3 \neq 0$

ssi $a \neq 0$ et $\lambda_2 \neq -a$ et $\lambda_3 \neq -a$

car $\lambda_1 = 0$

ssi $a \neq 0$ et $(-a)^2-(c-a)(-a)+2(c-a) \neq 0$

ssi $a \neq 0$ et $a^2+ac-a^2+2c-2a \neq 0$

ssi $a \neq 0$ et $a+2c+ac \neq 0$

cqfd $\boxed{(*) \text{ est vérifiée pour } M(a,a,c)}$

8. D'après 3.c) les VP de $M(a,b,c)$ ne dépendent pas de l'ordre de a,b,c.

Si $\mathrm{card}(\{a,b,c\})=2$ alors $M(a,b,c)$ est de la forme

$M(a,a,c)$ ou $M(a,c,a)$ ou $M(c,a,a)$

avec $a \neq c$.

Dans tous les cas $M(a,b,c)$ a les mêmes VP que $M(a,a,c)$ et le raisonnement de 7.c) s'applique.

cqfd $\boxed{(*) \text{ est vérifiée lorsque } \mathrm{card}(\{a,b,c\})=2}$

PARTIE D

9\. a) g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$ en tant que somme de fonctions inverses.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\} \quad g(x) = \dfrac{-1}{(x-a)^2} - \dfrac{1}{(x-b)^2} - \dfrac{1}{(x-c)^2} < 0$

donc g est strictement décroissante sur $]-\infty, a[$, $]a,b[$, $]b,c[$ et $]c,+\infty[$.

Les limites aux extrémités de ces intervalles sont élémentaires

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	0

b) g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur chaque intervalle $]-\infty, a[$; $]a,b[$, $]b,c[$ et $]c,+\infty[$.

Elle réalise donc quatre bijections :

- de $]-\infty, a[$ sur $]-\infty, 0[$
- de $]a,b[$ sur $\mathbb{R}$
- de $]b,c[$ sur $\mathbb{R}$
- de $]c,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$

Dans chacun des 3 derniers cas 1 appartient à l'intervalle d'arrivée. Mais pas dans le premier cas.

Ccl l'équation $g(x) = 1$ admet exactement 3 solutions $\alpha_1 \in]a,b[$, $\alpha_2 \in]b,c[$ et $\alpha_3 \in]c,+\infty[$.

Les solutions vérifient bien $a < \alpha_1 < b < \alpha_2 < c < \alpha_3$

c) Calculons $M(a,b,c)X_\lambda$

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\lambda-a \\ 1/\lambda-b \\ 1/\lambda-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} \\ \frac{1}{\lambda-a} + \frac{1+b}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} \\ \frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1+c}{\lambda-c} \end{pmatrix}$$

on sait que $g(\lambda)=1$ donc $\frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} = 1$

donc $\frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} = 1 - \frac{1}{\lambda-a}$

il vient $\frac{1+a}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} = \frac{1+a}{\lambda-a} + 1 - \frac{1}{\lambda-a} = \frac{a}{\lambda-a} + 1$

$$= \frac{a}{\lambda-a} + \frac{\lambda-a}{\lambda-a}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-a}$$

de même $\frac{1}{\lambda-a} + \frac{1+b}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} = \frac{\lambda}{\lambda-b}$

et $\frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1+c}{\lambda-c} = \frac{1}{\lambda-c}$

cl $M(a,b,c)X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda/\lambda-a \\ \lambda/\lambda-b \\ \lambda/\lambda-c \end{pmatrix} = \lambda X_\lambda$

ne pas oublier

de plus $X_\lambda \neq \theta$ donc X_λ est vecteur propre de $M(a,b,c)$ associé à la VP λ.

d) L'équation $g(x)=1$ admet exactement 3 solutions λ_1, λ_2 et λ_3 donc d'après c) $M(a,b,c)$ admet 3 VP distinctes, au moins.

Comme $M(a,b,c)$ est d'ordre 3, elle admet au plus trois VP

cl $\boxed{M(a,b,c) \text{ admet exactement 3 VP distinctes.}}$

10. a) Si $a<b<c$ $M(a,b,c)$ admet 3 VP distinctes d'après 9.b.
Mais d'après 3.c) les VP de $M(a,b,c)$ ne dépendant pas de l'ordre de a, b et c.
Dès lors si $\mathrm{card}(\{a,b,c\})=3$ alors $M(a,b,c)$ admet 3VP distincts.

b) (*) énonce que $M(a,b,c)$ est inversible ssi $ab+ac+bc+abc\neq 0$

or $M(a,b,c)$ est inversible ssi 0 n'est pas VP de $M(a,b,c)$
les VP de $M(a,b,c)$ sont les solutions de l'équation $g(x)=1$

donc $M(a,b,c)$ est inversible ssi $g(0)\neq 1$

$$\text{ssi } \frac{1}{-a}+\frac{1}{-b}+\frac{1}{-c}\neq 1$$

$$\text{ssi } \frac{-bc-ac-ab}{abc}\neq 1$$

$$\text{ssi } -bc-ac-ab\neq abc$$

$$\text{ssi } ab+ac+bc+abc\neq 0$$

cl (*) est vérifiée pour $M(a,b,c)$ lorsque $\{a,b,c\}$ est de cardinal 3

11. a) On pourrait faire l'étude de l'inversibilité de A par les méthodes habituelles (résolution de $AX=Y$, calcul de $rg(A)$, ...)

Mais ici on remarque que

$$A=\begin{pmatrix} 1+0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+2 \end{pmatrix}=M(0,1,2)$$

D'après (*) $M(0,1,2)$ est inversible ssi $0\times 1+0\times 2+1\times 2+0\times 1\times 2\neq 0$

$$\text{ssi } 2\neq 0$$

cl c'est vrai donc $\boxed{A=M(0,1,2) \text{ est inversible}}$

b) i/ D'après 9.b) les VP de $A = M(0,1,2)$ sont les solutions de $g(x)=1$ avec $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

Elles vérifient $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2 < \lambda_3$

Posons $\alpha = \lambda_3$

On a $g(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3+4+6}{12} = \frac{13}{12} > 1$

$g(5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{12+15+20}{60} = \frac{47}{60} < 1$

ce selon le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]4,5[$

```
fuction alpha = valeur-approchée()
   x=4
   y=5
   while y-x>10^(-3)
      m=(x+y)/2
      if 1/m+1/(m-1)+1/(m-2) <1 then
            y=m
      else
            x=m
      end
   end
   alpha=(x+y)/2
endfunction
```

BILAN

- Dans la partie A les questions 1 et 2 sont classiques ; la question 3 est beaucoup plus originale et a du déstabiliser la plupart des candidats.

- La question 4 de la partie B était très classique, il fallait gagner les points sur cette question. Les questions 5.a) et 5.b) étaient elles aussi accessibles.

- La partie C était beaucoup plus difficile ; la question 6.a) était faisable ; la 6.b) nécessitait des calculs très techniques le reste semble réservé aux meilleurs candidats.

- Il y avait possibilité de gratter quelques points dans la partie D. Les questions 9.a) et 9.b) relevaient d'une banale étude de fonctions la question 11 était aussi accessible.

BILAN général

Le changement de format à deux problèmes a pu être destabilisant. Il y a beaucoup plus d'algèbre linéaire que les années précédentes, au détriment des probas.
Le problème d'algèbre linéaire était trop abstrait pour permettre aux élèves sérieux de montrer leurs qualités.

Dans l'ensemble le sujet était très long, il sera surement très largement surnoté. Comme un grand nombre de questions très techniques auront été peu abordées, les étudiants qui ont su grapiller les points à travers le DS devraient être favorisés.