Exercice 1

Partie I

1. Comme on me demande une base de F je vais directement écrire F sous la forme d'un Vect (...)

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_3} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= J} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

donc $F = \text{Vect}(I_3, J)$ et $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

de plus (I_3, J) est une famille génératrice de F ; I_3 et J sont non colinéaires donc forment une famille libre

cc $\boxed{\text{Une base de F est } (I_3, J)}$ et $\boxed{\dim(F) = \text{card}(I_3, J) = 2}$

2. G n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a bien $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $O_3 \in G$. Par contre G n'est pas stable par la multiplication.

Par exemple $I_3 \in G$ car $I_3^2 = I_3$

mais $2I_3 \notin G$ car $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq 2I_3$

cc $\boxed{G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

3. a) $A \in F \cap G$ si A appartient à la fois à F et à G

- $\underline{A \in F}$ car $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ qui est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

avec $a = 2/3$ et $b = -1/3$

- $\underline{A \in G}$ car $A^2 = A$ en effet :

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}$$
$$= -\frac{2}{9}+\frac{1}{9}-\frac{2}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

d'où $\boxed{A \in F \cap G}$

3.b) $A^2 = A$ donc $\boxed{P = X^2 - X \text{ est un polynôme annulateur de } A}$

3.c) $P = X(X-1)$ donc $Z(P) = \{0, 1\}$

d'où les valeurs propres possibles de A sont 0 et 1.

• Déterminons $E_0(A)$

$E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}$

soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad X \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 = -L_2 \end{array}$$

le système est échelonné de rang 2 il y a donc une infinité de solutions à 1 paramètre, disons z.

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

d'où $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$ donc $\boxed{0 \text{ est bien valeur propre de } A}$

On a $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq 0$ donc forme une famille libre

cl: Une base de $E_0(A)$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

- Déterminons $E_1(A)$

$$E_1(A) = \ker(A - I) = \{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A-I)X = 0 \}$$

$$A - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad /!\backslash \qquad I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad !!$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\qquad X \in E_1(A) \iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \iff \{ -x - y - z = 0$

Le système est de rang 1 donc il y a une infinité de solutions à 2 paramètres, disons y et z :

$$X \in E_1(A) \iff \begin{cases} x = y + z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{donc } E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

cl: $E_1(A) \neq \{0\}$ donc 1 est bien valeur propre de A.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires donc forment une famille libre

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_1(A)$

3.d) - 0 est valeur propre de A donc A n'est pas inversible

- A est diagonalisable

on peut le justifier en remarquant que $\dim(E_0) + \dim(E_1) = 1 + 2 = 3$

ou plus simplement en disant que A est symétrique.

Partie II

4.a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$

donc $M \in G \iff M^2 = M$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ab+b^2 = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ab+b^2-b = 0 \end{cases}$$

cl $\boxed{M \in G \iff \begin{cases} a^2+2b = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}}$

4.b) Il vient $M \in G \iff \begin{cases} a^2+2b = a \\ b = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a^2+2b = a \\ b+2a-1 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a^2 = a \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2+2(1-2a)^2 = a \\ b = 1-2a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2-a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2+2(1-4a+4a^2) = a \\ b = 1-2a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 9a^2-9a+2 = 0 \\ b = 1-2a \end{cases}$$

$\Delta = 9^2 - 4\times2\times9 = 9$ donc deux solutions $a = \frac{9-3}{2\times9} = \frac{1}{3}$
ou $a = \frac{9+3}{2\times9} = \frac{2}{3}$

dès lors

$$M \in G \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 1-2\times1/3 = 1/3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 2/3 \\ b = 1-2\times2/3 = -1/3 \end{cases}$$

cl $M \in G \iff M = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ ou $M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3&1/3&1/3 \\ 1/3&1/3&1/3 \\ 1/3&1/3&1/3 \end{pmatrix}}_{=I_3-A}$ ou $M = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3&-1/3&-1/3 \\ -1/3&2/3&-1/3 \\ -1/3&-1/3&2/3 \end{pmatrix}}_{=A}$

donc $\boxed{F \cap G = \{O_3, I_3, A, I_3-A\}}$

5. $B = I - A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

A et B appartiennent à F et ils sont non colinéaires donc ils forment une famille libre de F.

de plus $\text{card}(A,B) = 2 = \dim(F)$ donc $\boxed{(A,B) \text{ est une base de } F}$

6. a) ERREUR d'ENONCÉ

il fallait poser $\alpha = a - b$ et $\beta = 2b + a$

$$\alpha A + \beta B = (a-b) \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + (2b+a) \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}$$ avec $p = (a-b) \times \frac{1}{3} \times 2 + (2b+a) \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{2a - 2b + 2b + a}{3} = \frac{3a}{3} = a$$

et $q = (a-b) \times \frac{1}{3} \times (-1) + (2b+a) \times \frac{1}{3}$

$$= \frac{-a + b + 2b + a}{3} = \frac{3b}{3} = b$$

cqfd $\boxed{\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = M}$

6. b) $AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = 0$ car $A^2 = A$

$BA = (I_3 - A)A = A - A^2 = 0$

cqfd $\boxed{AB = BA = 0_3}$

6. c) Première méthode : par récurrence

Soit $P(n)$ la pté « $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ »

. Initialisation

$P(0)$ est vraie car $M^0 = I_3$ (convention)

et $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I_3 - A = I_3$

. Hérédité

Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

$M^{n+1} = M^n . M$

$= (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B)$ ← HdR

$= \alpha^n A . \alpha A + \alpha^n A . \beta B + \beta^n . B . \alpha A + \beta^n B . \beta B$

$= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta \underbrace{AB}_{=0} + \beta^n \alpha \underbrace{BA}_{=0} + \beta^{n+1} B^2$

$= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$ car $A^2 = A$ et d'après 4b) $B^2 = B$ puisque $B = I_3 - A \in G$

cqfd selon le principe de récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = \alpha^n A + \beta^n B}$

Deuxième méthode : par la formule du binôme

A et B commutent donc selon la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = (\alpha A + \beta B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} A^k B^{n-k}$$

or $A^2 = A$ donc (récurrence évidente) $\forall k \geq 1 \ A^k = A$

de même $B^2 = B$ donc $\forall k \geq 1 \ B^k = B$

j'isole les termes en 0 et n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = \underbrace{\binom{n}{0} \alpha^0 \beta^n A^0 B^n}_{\text{terme en } 0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \underbrace{A.B}_{=0} + \underbrace{\binom{n}{n} \alpha^n \beta^0 A^n B^0}_{\text{terme en } n}$$

$$= \beta^n B^n + \alpha^n A^n = \alpha^n A + \beta^n B \qquad (\text{car } A^n = A \text{ et } B^n = B)$$

il reste à vérifier que cela reste vrai pour $n = 0$

7.a) Cette question sera neutralisée car elle nécessite les bonnes valeurs de α et β.

- Si $\alpha = a - b = 0$ alors $a = b$ et $M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$ est non inversible puisque ses colonnes sont liées.

- Supposons $\alpha \neq 0$

$$\operatorname{rg}(M)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a\end{pmatrix}=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 \\ b & a & b \\ b & b & a\end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

j'ai cette idée pour faire apparaître $\alpha = a-b$

$$=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ b & a & b \\ b & b & a\end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1/(a-b) \text{ car } a-b\neq 0$$

$$=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 2b & a\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - bL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1\end{matrix}$$

$$=\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow (a-b)L_3 - 2bL_2$$

$a-b\neq 0$

avec $\alpha = a(a-b)-2b^2 = a^2-ab-2b^2$

$= (a-b)(a+2b)$ astuce

Cl: M est inversible ssi $\operatorname{rg}(M)=3$

ssi $(a-b)(a+2b)\neq 0$ et $a-b\neq 0$

ssi $a-b\neq 0$ et $a+2b\neq 0$

$\boxed{M \text{ est inversible ssi } \alpha\neq 0 \text{ et } \beta\neq 0}$

7.b) Par définition $M^{-n}=(M^n)^{-1}$ pour vérifier que $M^{-n}=\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B$ il suffit de montrer que $M^n\times(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B)=I_3$

Soit $n\in\mathbb{N}$ $\quad M^n\times(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B)=(\alpha^nA+\beta^nB)(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B)$ (d'après 6.c))

$= \alpha^nA\alpha^{-n}A + \alpha^nA\beta^{-n}B + \beta^nB\alpha^{-n}A + \beta^nB\beta^{-n}B$

$= \alpha^0A^2+\beta^0B^2$ (car $AB=BA=\Theta$)

$= A^2+B^2$

$= A+B$ car $A^2=A$ et $B^2=B$

$= I_3$ car $B=I_3-A$

Cl $\boxed{M^{-n}=\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B \text{ pour } \forall n\in\mathbb{N}}$

Partie III

8. $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ c'est la matrice Π avec $a = -2$ et $b = -1$

on a donc $I_3 - T = \alpha A + \beta B$ avec $\alpha = a - b = -2+1 = -1$
$\beta = 2b + a = -4$

cc $I_3 = -A - 4B$ on pourrait traiter cette question en résolvant l'équation $I_3 - T = \alpha A + \beta B$

9. D'après 7.b) $(I_3 - T)^{-1} = \alpha^{-1} A + \beta^{-1} B$
$= (-1)^{-1} A + (-4)^{-1} B$
$= -A - \frac{1}{4} B$

10. $L = TL + Y \iff L - TL = Y$
$\iff L(I_3 - T) = Y$
$\iff L = (I_3 - T)^{-1} Y$
$\iff L = (-A - \frac{1}{4}B) Y$

cc Il existe une unique matrice L tq $L = TL + Y$ et on a $L = (-A - \frac{1}{4}B)Y$

on trouve après calculs $L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rmq on pourrait résoudre à la main le système d'équation linéaire $L = LT + Y$ en posant $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} - L = TX_n + Y - (TL + Y)$ (car $L = TL + Y$)
$= TX_n + Y - TL - Y$
$= TX_n - TL$
$= T(X_n - L)$ $\left[\text{cc } \forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} - L = T(X_n - L)\right]$

Soit $P(n)$ la pté " $X_n - L = T^n(X_0 - L)$ "

- Initialisat°

$P(0)$ est vraie car $T^0(X_0 - L) = I(X_0 - L) = X_0 - L$

• <u>Hérédité</u>

Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

$$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= T(X_n - L) \\ &= T \times T^n (X_0 - L) \quad \text{HdR} \\ &= T^{n+1}(X_0 - L) \end{aligned}$$

cl selon le principe de récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n - L = T^n(X_0 - L)}$

12. $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice M de la partie II avec $a=3, b=1$

donc en posant $\alpha = a-b = 2$ $\beta = 2b+a = 5$ on a d'après 7.b)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T^n = \alpha^n A + \beta^n B$$

donc $X_n - L = T^n(X_0 - L) = (\alpha^n A + \beta^n B)(X_0 - L)$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = (2^n A + 5^n B)(X_0 - L) + L}$

<u>BILAN</u>

L'exercice était assez classique dans sa forme mais une erreur d'énoncé rendait certaines questions délicates.

• La partie I ne posait pas de problème et a dû permettre aux étudiants sérieux de montrer leurs qualités

• La partie II était plus difficile et a sûrement fait pas mal de dégâts. On pouvait gratter des points en 6.b) 6.c) et 7.b)

• La partie III était plus facile à condition d'admettre certaines questions relatives à l'erreur d'énoncé.

Exercice 2

Partie I

1. • $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} 2-\frac{1}{x} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to 0^+} (2-\frac{1}{x})\ln(x) = +\infty$

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left((2-\frac{1}{x})\ln(x)\right) = +\infty}$

• $(2-\frac{1}{x})\ln(x) = 2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (r. de croissances comparées)

et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (2-\frac{1}{x})\ln(x) = +\infty$

Or par composée $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \exp\left((2-\frac{1}{x})\ln(x)\right) = +\infty}$

2.a) h est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fct$^{\circ}$ usuelles dérivables et

$$\forall x>0 \quad h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$$

Or $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$

2.b) par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)+2x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)+2x-1 = -\infty$

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$+\infty$

h est continue (car dérivable) sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $h(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$

0 appartient à l'intervalle d'arrivée

Or $\boxed{\text{l'équation } h(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha>0}$

$h(1/2) = \ln(\frac{1}{2}) + 2\times\frac{1}{2} - 1 = \ln(1/2) = -\ln(2) < 0$

$h(1) = \ln(1) + 2\times 1 - 1 = 1 > 0$

Or selon le thm des valeurs intermédiaires $\boxed{\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[}$

2.c) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que composée et produit de fct usuelles dérivables et

$$\forall x>0 \quad g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\right)\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{2x-1}{x}\times\frac{1}{x}\right)g(x)$$

$$= \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{2x-1}{x^2}\right)g(x) = \frac{h(x)}{x^2}\,g(x)$$

cl $\left[\forall x>0 \quad g'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x)\right]$

2.d) $\forall x>0 \quad g(x)>0$ car c'est une exponentielle.
$x^2>0$ donc g' est du signe de h.

D'après 2.b) on a :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit $x>0$ $\quad g(x)-x^2 = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2$

$$= \exp\left(2\ln(x) - \frac{1}{x}\ln(x)\right) - x^2$$

$$= e^{2\ln(x)} \times e^{-1/x\ln(x)} - x^2 \qquad e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$= x^2 \times e^{-1/x\ln(x)} - x^2 \qquad e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

$$= x^2\left[e^{-1/x\ln(x)} - 1\right]$$

or $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}\ln(x) = 0$ (thme de croissances comparées)

donc $e^{-1/x\ln(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}\ln(x)$

cl $\left[g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\times\left(-\frac{1}{x}\ln(x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x)\right]$

Partie II

4. Soit $P(n)$ la pté « u_n existe et $u_n > 0$ »

- **Initialisat°**

  $P(0)$ est vraie puisque $u_0 > 0$

- **Hérédité**

  Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

ne pas oublier ! →
  * $u_n > 0$ par HdR et g est définie sur $]0,+\infty[$ donc $u_{n+1} = g(u_n)$ existe
  * $u_{n+1} = g(u_n) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) > 0$ (pté de l'exponentielle)

  donc $P(n+1)$ est vraie

Cl selon le principe de récurrence, [pour $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n existe et $u_n > 0$]

5.

```
function U = suite(u0, n)
    U = zeros(1, n+1)
    U(1) = u0
    for i = 2:n+1
        U(i) = exp((2 - 1/U(i-1)) * log(U(i-1)))
    end
endfunction
```

6. a)

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$		$+$	0	$+$	

on pouvait aussi poser $j(x) = (x-1)\ln(x)$ et faire l'étude de ses variation pour déterminer son minimum.

6. b) Soit $x > 0$

$\frac{g(x)}{x} \geq 1 \iff g(x) \geq x$

$\iff \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \geq x$) ln est croissante strict sur $]0,+\infty[$

$\iff \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \geq \ln(x)$

$\iff \left(2 - \frac{1}{x} - 1\right)\ln(x) \geq 0$ ↲ $-\ln(x)$

donc $\frac{g(x)}{x} \geq 1 \iff \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x) \geq 0$

$\iff \frac{(x-1)}{x}\ln(x) \geq 0$

c'est vrai d'après 6.a) Cq par équivalence $\boxed{\forall x>0 \quad \frac{g(x)}{x} \geq 1}$

6.c) $\forall x>0 \quad \frac{g(x)}{x} \geq 1$ donc $g(x) \geq x$

de plus $g(x) = x \iff g(x)/x \geq 1$

$\iff \frac{(x-1)}{x}\ln(x) = 0$ d'après la question précédente

$\iff (x-1)\ln(x) = 0$ $\times x$

d'après le tableau de signes du 6.a) $\boxed{g(x) = x \text{ si et seulement si } x = 1}$

7. $\forall x>0 \quad g(x) \geq x$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

donc en remplaçant x par u_n : $g(u_n) \geq u_n$

Cq $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

8.a) Selon les variations de g (question 2d)) et comme $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$

on a :

x	$1/2$		α		1
g	$g(1/2)$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(1)$

or $g(\frac{1}{2}) = \exp\left(\left(2-\frac{1}{1/2}\right)\ln(\frac{1}{2})\right) = \exp(0) = 1$

$g(1) = \exp((2-1)\ln(1)) = \exp(0) = 1$

donc $g([\frac{1}{2},1]) = [g(\alpha), 1]$ or $g(\alpha) \geq \alpha > \frac{1}{2}$ (question 6.c))

donc $g([\frac{1}{2},1]) \subset [\frac{1}{2},1]$

Cq $u_0 \in [\frac{1}{2},1]$ et $[\frac{1}{2},1]$ est stable par g donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [\frac{1}{2},1]}$

8.b) la suite (u_n) est croissante et majorée donc selon le thme de la limite monotone elle converge vers une limite ℓ.

Comme g est continue on a : $\quad \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & g(u_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & g(\ell) \end{array}$

D'après 6.c) $g(\ell) = \ell$ ssi $\ell = 1$ $\quad$ cl $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1}$.

9. (a) On peut aussi utiliser la notion d'intervalle stable mais pour changer on va procéder par récurrence.

Soit $P(n)$ la pté « $u_n > 1$ »

- <u>Initialisation</u>

  $P(0)$ est vraie car $u_0 > 1$

- <u>Hérédité</u>

  Soit $n \geq 0$ un entier fixé, supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

  Par HdR $\quad u_n > 1$

  donc $g(u_n) > g(1)$ $\quad$ (car g est croissante strict. sur $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha < 1$)

  donc $u_{n+1} > 1$ $\quad$ (car $g(1) = 1$ d'après 8.a))

cl selon le principe de récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 1}$

9.b) (u_n) est croissante donc selon le théorème de la limite monotone (u_n) admet une limite.

Si cette limite était finie on aurait comme en 8.b) $\ell = 1$ ce qui est absurde car $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq u_0 > 1$

cl $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

10. Si $0 < u_0 < \frac{1}{2}$ alors comme g est strict décroissante sur $]0, \alpha]$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$ on a $g(u_0) > g(\frac{1}{2}) = 1$

Donc $u_1 > 1$. En appliquant la question 9 à la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ on en déduit que $\boxed{\text{si } u_0 \in]0, \tfrac{1}{2}[\text{ alors } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Partie II)

11. • f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car sur cet ouvert $\frac{1}{x}$ et $\ln(x)$ ont un sens.

• $(x,y) \mapsto y - \frac{1}{x}$ et $(x,y) \mapsto \ln(x)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

cl par composée par exp et par produit $\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}}$

12. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ $\quad \partial_1(f)(x,y) = \left[\left(0 + \frac{1}{x^2}\right)\ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}\right] \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{yx-1}{x} \times \frac{1}{x}\right) f(x,y)$$

$$= \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y)$$

et $\partial_2(f)(x,y) = \left[(1+0)\ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right) \times 0\right] \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \ln(x) f(x,y)$$

13. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\nabla(f)(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln(x) + xy - 1 = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases}$$

car $f(x,y) \neq 0$ car c'est une exponentielle

$$\iff \begin{cases} 0 + 1 \times y - 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\iff x = y = 1$$

cl $\boxed{f \text{ admet comme unique point critique } a = (1,1)}$

14. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{(1/x + y)x^2 + (\ln(x) + xy - 1) \times 2x}{x^4} f(x,y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \times \underbrace{\frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2}}_{\text{d'après 13.}} f(x,y)$$

donc $\partial^2_{1,1}(f)(1,1) = \frac{(1+1)1^2 + (\ln(1) + 1 - 1) \times 2 \times 1}{1^4} f(1,1) + 0$

car $\partial_1(f)(1,1) = 0$

$$= 2f(1,1) = 2\exp\left(\left(1 - \frac{1}{1}\right)\ln(1)\right) = 2$$

selon Schwarz comme f est C^2 sur un ouvert.

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y)$$

et $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial_1(\partial_2(f))(x,y)$

$$= \frac{1}{x} f(x,y) + \ln(x) \times \frac{\ln(x)+xy-1}{x^2} f(x,y)$$

donc $\partial^2_{1,2}(f)(1,1) = \partial^2_{2,1}(f)(1,1) = \frac{1}{1} f(1,1) + 0 = f(1,1) = 1$

Enfin $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \partial_2(\partial_2(f))(x,y)$

$$= 0.f(x,y) + \ln(x) \times \ln(x) f(x,y)$$

$$= (\ln(x))^2 f(x,y)$$

donc $\partial^2_{2,2}(f)(1,1) = (\ln(1))^2 f(1,1) = 0$

cc La matrice Hessienne de f en a est $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad H - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

donc $\det(H - \lambda I_2) = (2-\lambda) \times (-\lambda) - 1$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$\Delta = 4+4 = 8$ il y a deux racines $\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$

et $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$

λ est valeur propre de H ssi $\det(H - \lambda I_2) = 0$

ssi $\lambda = 1+\sqrt{2}$ ou $\lambda = 1-\sqrt{2}$

cc les valeurs propres de H sont non nulles et et de signes opposés donc f n'admet pas d'extremum local en a mais un point col.

16. f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ donc elle n'admet pas d'extremum global.

BILAN

- Les parties I et II étaient classiques. Certains résultats intermédiaires étaient donnés ce qui permettait de se rattraper. Il y avait moyen de récupérer pas mal de points sur ces deux parties
- La partie III se faisait assez bien à part le calcul des dérivées partielles d'ordre 2 qui était de difficulté déraisonnable.

Exercice 3

Partie I

1.a) X_n est le nbre de succès de l'événement "poser le jeton dans l'urne U_1" de probabilité $1/3$ lors de n tentatives identiques et indépendants

Cl $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)}$

en remplaçant le n° de l'urne $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{1}{3}) \text{ et } Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{1}{3})}$

1.b) $P(X_n=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\quad P(X_n=n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Cl $\boxed{P(X_n=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } P(X_n=n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

1.c) Les n premiers jetons sont répartis dans es urnes U_1, U_2 et U_3.

On a donc l'égalité $X_n+Y_n+Z_n = n$

$(Y_n=0)\cap(Z_n=0)$ signifie qu'aucun jeton ne va dans les urnes U_2 et U_3. Ils vont donc tous dans U_1

Cl $\boxed{(Y_n=0)\cap(Z_n=0) = (X_n=n)}$

1.d) $V_n = (X_n=0)\cup(Y_n=0)\cup(Z_n=0)$

1.e) Selon la formule du crible

$$P(V_n) = P(X_n=0)+P(Y_n=0)+P(Z_n=0) - P((X_n=0)\cap(Y_n=0)) - P((X_n=0)\cap(Z_n=0))$$
$$- P((Y_n=0)\cap(Z_n=0)) + P(\underbrace{(X_n=0)\cap(Y_n=0)\cap(Z_n=0)}_{\text{impossible}})$$

d'après c

$$= P(X_n=0)+P(Y_n=0)+P(Z_n=0) - P(Z_n=n) - P(Y_n=n) - P(X_n=n)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

d'après 1.b) car X_n, Y_n, Z_n suivent la même loi

Cl $\boxed{P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

2. Au moins une urne reste toujours vide si c'est le cas avec 1 jeton et avec deux jetons et avec 3 jetons et etc. indéfiniment

d'où $\boxed{V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n}$

$(V_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'évts donc

$$P(V) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n) = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc $\boxed{P(V) = 0}$

3. a)

```
function t=T()
    X=0,Y=0,Z=0
    n=0
    liste =[X,Y,Z]
    while liste(1)*liste(2)*liste(3) ==0
        i=grand(1,1,"uin",1,3)
        liste(i)=liste(i)+1
        n=n+1
    end
    t=n
endfunction
```

si le produit est égal à 0 c'est qu'au moins un des 3 termes est nul

3. b)

```
S=0
for i=1: 10000
    S=S+T()
end
disp(S/10000)
```

4. $T(\Omega)$ est infini

il faut au minimum 3 jetons pour que chaque urne contienne au moins un jeton

d'où $\boxed{T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![}$

5. $(T=n)$ si à l'instant $n-1$ il y a au moins une urne vide et si ce

n'est plus le cas à l'instant n.

On a donc $(T=n) = V_{n-1} \cap \overline{V_n}$

$= V_{n-1} \setminus V_n$ car $V_n \subset V_{n-1}$

cl $\boxed{\forall n \geq 3, \quad P(T=n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)}$

6. Sous réserve d'existence $E(T) = \sum_{n=3}^{+\infty} n\, P(T=n)$

• Existence

$$nP(T=n) = nP(V_{n-1}) - nP(V_n)$$

$$= n\left(3\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right) - n\left(3\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n} - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$q^n = q \times q^{n-1}$

$$= 3n\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} - 3n\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} + n\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= n\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}$$

On reconnaît une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées de raisons $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc ces séries convergent absolument et $\boxed{T \text{ admet une espérance}}$.

• Calcul

$$E(T) = \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}$$

⚠ la série géo. dérivée commence à 1

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} \underbrace{- 1 - 2\times\tfrac{2}{3}}_{\text{terme en 1 et 2}} - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} \underbrace{- 1 - 2\times\tfrac{1}{3}}_{\text{idem}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 9 - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{9}{4} - 1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 8 - \cancel{\tfrac{4}{3}} - \frac{9}{2} + 2 + \cancel{\tfrac{4}{3}} = 10 - \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$$

cl $\boxed{T \text{ admet une espérance et } E(T) = \frac{11}{2}}$

Partie III

7 .a) $X_2(\Omega) = [\![0,2]\!]$ d'après 1 a)

et $W_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$ car après 2 placements de jetons il y a au moins une urne vide et au maximum 2.

Notons $J_{1,k}$ l'evt " on a mis le jeton n° k dans l'urne $\mathcal{U}_1$ "

on définit de même $J_{2,k}$ et $J_{3,k}$

• $(X_2=0)\cap(W_2=1)$ si on a mis un jeton dans $\mathcal{U}_2$ et un jeton dans $\mathcal{U}_3$

donc $P((X_2=0)\cap(W_2=1)) = P(J_{2,1}\cap J_{3,2}) + P(J_{3,1}\cap J_{2,2})$ les placemts sont indépendants

$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$= 2/9$

• $(X_2=0)\cap(W_2=2)$ si on a mis deux jetons dans $\mathcal{U}_2$ ou deux jetons dans $\mathcal{U}_3$

donc $P((X_2=0)\cap(W_2=2)) = P(J_{2,1}\cap J_{2,2}) + P(J_{3,1}\cap J_{3,2}) = \frac{2}{9}$

• $(X_2=1)\cap(W_2=1)$ signifie qu'on a mis un jeton dans $\mathcal{U}_1$ et l'autre dans $\mathcal{U}_2$ ou $\mathcal{U}_3$

on en déduit $P((X_2=0)\cap(W_2=1)) = \frac{4}{9}$

• $(X_2=1)\cap(W_2=2)$ est impossible car s'il y a 1 jeton dans $\mathcal{U}_1$ alors il y en a un autre dans $\mathcal{U}_2$ ou $\mathcal{U}_3$ et donc une seule urne est vide

• $(X_2=2)\cap(W_2=1)$ est impossible.

• $(X_2=2)\cap(W_2=2)$ si les deux jetons sont dans $\mathcal{U}_1$

donc $P((X_2=2)\cap(W_2=2)) = P(X_2=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

cl

X_2 \ W_2	1	2
0	2/9	2/9
1	4/9	0
2	0	1/9

7.b) $P(W_2=1)=P((X_2=0)\cap(W_2=1))+P((X_2=1)\cap(W_2=1))+P((X_2=2)\cap(W_2=1))$
$= 6/9 = 2/3$

de même $P(W_2=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$\boxed{E(W_2)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=4/3}$

7.c) $E(X_2W_2)=0\times1\times\frac{2}{9}+0\times2\times\frac{2}{9}+1\times1\times\frac{4}{9}+1\times2\times0+2\times1\times0+2\times2\times\frac{1}{9}$
$=8/9$

alors $\operatorname{cov}(X_2,W_2)=E(X_2W_2)-E(X_2)E(W_2)$
$= 8/9 - 2\times\frac{1}{3}\times4/3$
$=0$

$X_2 \hookrightarrow B(2,\frac{1}{3})$
donc $E(X_2)=2\times\frac{1}{3}$

7.d) La covariance est nulle mais je ne peux pas en déduire que X_2 et W_2 sont indépendantes.
Par contre $P((X_2=1)\cap(W_2=2))=0\neq P(X_2=1)P(W_2=2)$
Cl $\boxed{X_2 \text{ et } W_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

8. $W_n(\Omega)=[\![0,2]\!]$ car $n\geqslant3$ donc toutes les urnes peuvent contenir au moins un jeton.

9.a) $W_{n,i}=1$ si l'urne U_i est encore vide à l'instant n.
Cela signifie que les n premiers placements se sont faits dans les 2 autres urnes.
Il y a $\frac{2}{3}$ de chances de placer un jeton dans l'une des deux autres urnes et les placements sont indépendants

Cl $P(W_{n,i})=\underbrace{\frac{2}{3}\times\dots\times\frac{2}{3}}_{n \text{ fois}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $W_{n,i}\hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

et $\boxed{E(W_{n,i})=\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

9.b) $\boxed{W_n=W_{n,1}+W_{n,2}+W_{n,3}}$

9.c) par linéarité $E(W_n)=E(W_{n,1})+E(W_{n,2})+E(W_{n,3})$
$=(2/3)^n+(2/3)^n+(2/3)^n=3\times(2/3)^n$ //

10. $P((X_n=n)\cap(W_n=2)) = P(X_n=n)\,P_{(X_n=n)}(W_n=2)$

or $P_{(X_n=n)}(W_n=2)=1$ car si toute les boules sont dans U_1 alors il y a deux urnes vides.

cl $\boxed{P((X_n=n)\cap(W_n=2)) = P(X_n=n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$ d'après 1.b)

si $1\leq k\leq n-1$ alors $P_{(X_n=k)}(W_n=2)=0$ car une des boules n'est pas allée dans U_1 et il y a donc au maximum une urne vide

cl $P((X_n=k)\cap(W_n=2))=0$ si $1\leq k\leq n-1$

11. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$ $(X_n=k)\cap(W_n=1)$ si k jetons sont allées dans U_1 et $n-k$ autres dans U_2 ou si k jetons sont allées dans U_2 et les $n-k$ autres dans U_3.

- Le nombre de placements possible est 3^n
- Le nombre de placements de k jetons dans U_1 et $n-k$ dans U_2 est $\binom{n}{k}$ (choix des k jetons parmi n qui vont dans U_1)
- Le nombre de placements de k jetons dans U_1 et $n-k$ dans U_3 est de même $\binom{n}{k}$

cl par équiprobabilité $\boxed{P((X_n=k)\cap(W_n=1)) = \dfrac{\binom{n}{k}+\binom{n}{k}}{3^n} = \dfrac{2\binom{n}{k}}{3^n}}$ pour tt $k\in[\![1,n-1]\!]$

Enfin $\boxed{P((X_n=n)\cap(W_n=1)) = 0}$ car si tous les jetons vont dans U_1 alors nécessairement $W_n=2$

12. $E(X_nW_n) = \sum_{i\in X_n(\Omega)}\sum_{j\in W_n(\Omega)} ij\,P((X_n=i)\cap(W_n=j))$ } car $W_n(\Omega)=[\![0,2]\!]$ et les terme en 0 sont nuls.

$= \sum_{i=0}^{n}\left[i\,P((X_n=i)\cap(W_n=1)) + 2i\,P((X_n=i)\cap(W_n=2))\right]$ } le terme en 0 est nul

$= \sum_{i=1}^{n} i\,P((X_n=i)\cap(W_n=1)) + 2\sum_{i=1}^{n} i\,P((X_n=i)\cap(W_n=2))$

Dès lors,

$$E(X_nW_n) = \sum_{i=1}^{n-1} i\,P\big((X_n=i)\cap(W_n=1)\big) + n\,\underbrace{P\big((X_n=n)\cap(W_n=1)\big)}_{=0 \text{ d'après } 11.}$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1} i\,\underbrace{P\big((X_n=i)\cap(W_n=2)\big)}_{=0 \text{ d'après } 10} + 2n\,P\big((X_n=n)\cap(W_n=2)\big)$$

cl $\boxed{E(X_nW_n) = 2n\,P\big((X_n=n)\cap(W_n=2)\big) + \sum_{i=1}^{n-1} i\,P\big((X_n=i)\cap(W_n=1)\big)}$

13. $E(X_nW_n) = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{i=1}^{n-1} i \times \frac{2\binom{n}{i}}{3^n}$ (selon 10 et 11.)

$$= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3^n}\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n}{i}$$

on sait que $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$

donc $\sum_{i=1}^{n-1} i\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n-1} n\binom{n-1}{i-1}$ chgt d'indice $j=i-1$

$$= n\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-1}{j}$$

$$= n\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} - \binom{n-1}{n-1}\right)$$

$$= n\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j 1^{n-1-j} - 1\right)$$

$$= n\left((1+1)^{n-1} - 1\right) = n\left(2^{n-1}-1\right)$$

Il vient $E(X_nW_n) = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3^n}n\left(2^{n-1}-1\right)$

$$= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2n}{3^n} = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

cl $\boxed{E(X_nW_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Alors $\operatorname{cov}(X_n,W_n) = E(X_nW_n) - E(X_n)E(W_n)$

$$= n\left(\frac{2}{3}\right)^n - n\times\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 0$$

14. On ne peut pas en déduire que X_n et W_n sont indépendantes.

BILAN

- la partie I contenait des questions assez accessibles si on réussissait à bien comprendre l'expérience. On avait fait un peu la même chose et TD (Ex 4 TD 11)
  la question 1.e) était difficile. On pouvait gratter des points sur le calcul de l'espérance (question 6). Le programme informatique était difficile.

- La partie II est beaucoup trop dure. Sans aide pour démarrer, la question 7a) a sans doute été mal traitée et cela empêchait de faire 7.b), c) d) Les étudiants astucieux auront peut être repéré que loi du couple était en fait donnée aux questions 10 et 11.
  Les questions suivantes auront à mon avis été traitées correctement par très peu de candidats : lourdeur des notations, utilisation du dénombrement, formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ non donnée dans 13...

BILAN GÉNÉRAL

On peut regretter que très peu de questions portent sur le programme de deuxième année (pas de densité, peu d'espaces vectoriels).
Le sujet était plutôt difficile et assez long. Les étudiants sérieux pouvaient montrer leurs qualités dans la partie I et la fin de la partie III de l'exercice 1 et dans les deux premières parties de l'exercice 2.

A mon avis, un étudiant qui aura convenablement traité ces questions aura une très bonne note.