# ESSEC - Maths II - 2022

## PARTIE I

1. a) $f_Z$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par régularité de la fct de répartition la fonction $\Phi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

1. b) D'après la question précédente $\Phi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et selon le cours :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi'(x) = f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} > 0$$

cq $\boxed{\Phi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

1. c) Par propriété des fct de répartition $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$

$\Phi$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\Phi(\mathbb{R}) = ]0,1[$.

cq $\boxed{\Phi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } ]0,1[}$

1. d) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_Z(t)\,dt$

① je pose $t = -u$

② je cherche $\alpha, \beta$ tq $\begin{cases} -\alpha = -\infty \\ -\beta = -x \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = +\infty \\ \beta = x \end{cases}$

③ $u \mapsto -u$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$

④ $t = -u$ donc $\frac{dt}{du} = -1$ et $dt = -du$

Il vient $\Phi(-x) = \int_{+\infty}^{x} f_Z(-u) \times (-du) = -\int_{+\infty}^{x} f_Z(u)\,du$ (car $f_Z$ est clairement paire)

$$= \int_{x}^{+\infty} f_Z(u)\,du$$

D'autre part $1 - \Phi(x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt$

donc $1-\Phi(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,dt}_{=1} - \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt$

$= \int_{x}^{+\infty} f_Z(t)\,dt$ (Chasles)

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(-x) = 1-\Phi(x)}$

Rmq Toutes les questions de 1. sont des ptés du cours. Mais on demandait ici d'en refaire la démonstration.

2.a) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de V.A. indépendantes admettant la même espérance et la même variance et soit

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

On a $\boxed{\text{pour tt } \varepsilon>0 \quad \lim_{n\to+\infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0}$

2.b) Le théorème limite central suppose que la suite de VA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et de même espérance et même variance.

On a alors $\bar{X}_n^* = \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Ici, selon les hypothèses de l'énoncé $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

donc $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x) = P(Z \leq x)$ pour tt réel $x$.

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)}$

3.a) $E(X_i) = \sum_{k\in X_i(\Omega)} k\,P(X_i = k)$

$= 0\times\frac{1}{5} + 2\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{5} + 10\times\frac{1}{10} = 3$

cl $\boxed{E(X_i) = 3}$

3.b) $E(X_i^2) = \sum_{k\in X_i(\Omega)} k^2\,P(X_i = k)$ (thme de transfert) donc $E(X_i^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 10^2 \times \frac{1}{10} = 17$

d'où (Koenig-Huygens) $Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 17 - 3^2 = 8$

3. c) i/ Posons $Y = f(U)$

Vu la définition de $f$ il est clair que $Y(\Omega) = \{0, 2, 5, 10\}$

- $P(Y=0) = P(f(U)=0) = P(U \in [0, \frac{1}{5}[)$

$$= P(0 \leq U \leq \tfrac{1}{5})$$
$$= F_U(\tfrac{1}{5}) - F_U(0)$$

or $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}$

donc $P(Y=0) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$

- de même $P(Y=2) = P(\frac{1}{5} \leq U \leq \frac{7}{10})$

$$= F_U(7/10) - F_U(\tfrac{1}{5})$$
$$= \tfrac{7}{10} - \tfrac{1}{5} = \tfrac{5}{10} = \tfrac{1}{2}$$

- $P(Y=5) = F_U(9/10) - F_U(\frac{7}{10}) = \frac{9}{10} - \frac{7}{10} = \frac{1}{5}$
- $P(Y=10) = F_U(1) - F_U(\frac{9}{10}) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

d'où $f(U)$ suit la même loi que $X_i$

3. c) ii/

```
function x=X()
    U=rand()
    if U<1/5 then x=0
    elseif U<7/10 then x=2
    elseif U<9/10 then x=5
    else x=10
    end
end function
```

3.d) $Z_n = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\bar{X}_n - 3}{\sqrt{8}}$ ⚠ $\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = \sqrt{8}$ et pas 8

or $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n} S_n$

$\underline{\underline{C}}$ $\left[ Z_n = \sqrt{n} \times \dfrac{\frac{1}{n} S_n - 3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{S_n - 3n}{2\sqrt{2}} \right]$

3.e) Le score du joueur après $n$ lancers est $S_n$.

On cherche ici $P(S_n \leq 500) = P(S_n - 3n \leq 500 - 3n)$

$= P\left( \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{S_n - 3n}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{500 - 3n}{2\sqrt{2}} \right)$

$= P\left( Z_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{500 - 3n}{2\sqrt{2}} \right)$

$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$ donc pour $n = 200$ on peut approcher $P(Z_n \leq x)$ par $\Phi(x)$.

Il vient $P(S_{200} \leq 500) \simeq \Phi\left( \frac{1}{\sqrt{200}} \times \frac{500 - 3 \times 200}{2\sqrt{2}} \right)$

$\simeq \Phi\left( -\frac{10}{4} \right)$

$\underline{\underline{C}}$ [La probabilité que le score du joueur soit inférieur ou égal à 500 est environ $\Phi(-2,5)$]

4.a) On sait que pour tt $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$

Par définition de la limite on a : pour tt $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n_x$ tq $\forall n \geq n_x$ $|P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \varepsilon$

On pose $\varepsilon = 1/2N$.

Donc pour tt $k \in [\![0, 2N-1]\!]$ il existe $n_k$ tq :

$$\forall n \geq n_k \; |P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k)| \leq \frac{1}{2N}$$

Si on pose $n_0 = \max_{1 \leq k \leq 2N-1} (n_k)$ alors

$$\forall n \geq n_0 \quad \max_{k \in \{1,..,2N-1\}} |P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k)| \leq \frac{1}{2N}$$

la convention de l'énoncé fait que: $|P(Z_n \leq x_0) - \Phi(x_0)| = |P(Z_n \leq x_{2N}) - \Phi(x_{2N})| = 0$

cl $\left[ \text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \ \max_{0 \leq k \leq 2N} |P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k)| \leq \frac{1}{2N} \right]$

4.b) i/ Soit $k \in \{1,..,2N\}$ et $x \in I_k = ]x_{k-1}, x_k[$

Soit $n \geq n_0$

$x \mapsto P(Z_n \leq x)$ et $x \mapsto \Phi(x)$ sont croissantes donc

$$P(Z_n \leq x_{k-1}) \leq P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$$

$$\text{et} \quad \Phi(x_{k-1}) \leq \Phi(x) \leq \Phi(x_k)$$

en particulier $P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$ et $-\Phi(x) \leq -\Phi(x_{k-1})$

cl par somme $\left[ P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_{k-1}) \right]$

4.b) ii/ On a donc $P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) \underbrace{- \Phi(x_k) + \Phi(x_k)}_{\text{astuce}} - \Phi(x_{k-1})$

or d'après 4.a) comme $n \geq n_0$

$$|P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k)| \leq \frac{1}{2N}$$

donc $P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k) \leq \frac{1}{2N}$

cl $\left[ P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \frac{1}{2N} \right]$

de plus $\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{k}{2N}\right)\right) - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{k-1}{2N}\right)\right)$ (pour $k \neq 1$ et $k \neq 2N$)

$$= \frac{k}{2N} - \frac{k-1}{2N} = \frac{1}{N}$$

(!) aux cas $x_0$ et $x_{2N}$

si $k=1$ alors $\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1}) = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{N}\right)\right) - \Phi(x_0)$

$$= \frac{1}{N} - 0 = \frac{1}{N}$$

si $k=2N$ alors $\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1}) = \Phi(x_{2N}) - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{2N-1}{2N}\right)\right)$

$$= 1 - \frac{2N-1}{2N} = \frac{1}{N}$$

cqfd $\boxed{\forall k \in \{1,\dots 2N\} \quad \Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1}) = \frac{1}{N}}$

4.b) iii) On reprend les inégalités écrites en 4.b) i)

$$P(Z_n \leq x_{k-1}) \leq P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$$

et $\quad \Phi(x_{k-1}) \leq \Phi(x) \leq \Phi(x_k)$

En particulier $\Phi(x) \leq \Phi(x_k)$ et $-P(Z_n \leq x) \leq -P(Z_n \leq x_{k-1})$

donc par somme $\Phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \Phi(x_k) - P(Z_n \leq x_{k-1})$

$$\leq \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \underbrace{\Phi(x_{k-1}) - P(Z_n \leq x_{k-1})}_{\leq \frac{1}{2N} \ (4.a)}$$

$$\leq \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) + \frac{1}{2N}$$

d'après 4.b).ii) cette expression est égale à $\frac{1}{N}$

cqfd $\boxed{\Phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{N}}$

4.c) Selon 4.b) on a pour $\forall n \geq n_0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq \frac{1}{N}$

et $\Phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{N}$ c'est-à-dire $P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \geq -\frac{1}{N}$

donc $\quad -\frac{1}{N} \leq P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq \frac{1}{N}$

cqfd $\boxed{\forall n \geq n_0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{N}}$

4.d) Pour n'importe quel $N \geq 1$ fixé, d'après 4.c), il existe un entier $n_0$ (dépendant de $N$) tq $|P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{N}$

Comme $n_0$ dépend de $N$ on le note plutôt $n_N$

On a donc $\forall n \geq n_1 \quad |P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq 1$

$\forall n \geq n_2 \quad |P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{2}$

et plus généralement $\forall n \geq n_N \quad |P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{1}{N}$

On pose $M_n = \frac{1}{N}$ pour tt $n \in \{n_{N-1}, \dots, n_N - 1\}$. La suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Alors $\forall N \geq 1$, $\forall n \geq n_N$ $0 \leq M_n \leq \frac{1}{N}$ donc $\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$

cl $\left[\text{on peut choisir la suite } (M_n)_{n\geq 1} \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} M_n = 0\right]$

5.a) i/ $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\Phi$ est continue sur $\mathbb{R}$

cl $\left[\lim_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)\right]$

5.a) ii/ Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que

- $\lim M_n = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad |P(Z_n \leq x) - \Phi(x)| \leq M_n$

On remplace $x$ par $x_n$ : $0 \leq |P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x_n)| \leq M_n$

cl $\lim M_n = 0$ donc selon le thme de l'encadrement,

$\left[\lim |P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x_n)| = 0\right]$

5.a) iii/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $|P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x)| = |P(Z_n \leq x_n) \underbrace{- \Phi(x_n) + \Phi(x_n)}_{\text{astuce}} - \Phi(x)|$

inégalité triangulaire $\hookrightarrow \leq |P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x_n)| + |\Phi(x_n) - \Phi(x)|$

selon 5.a).i/ $\lim_{n\to+\infty} |\Phi(x_n) - \Phi(x)| = 0$

selon 5.a)ii/ $\lim_{n\to+\infty} |P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x_n)| = 0$

cq selon le thm de l'encadrement $\lim_{n\to+\infty} |P(Z_n \leq x_n) - \Phi(x)| = 0$

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x_n) = \Phi(x)}$

5.b) i) Soit $n \geq 1$ on a : $(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \subset (Z_n < x) \subset (Z_n \leq x)$

cq $\boxed{\mathbb{P}(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) \leq \mathbb{P}(Z_n < x) \leq \mathbb{P}(Z_n \leq x)}$

5.b) ii) $\lim_{n\to+\infty} x - \frac{1}{n} = x$ donc selon 5.a) iii) $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x - \frac{1}{n}) = \Phi(x)$

et selon 2.b) $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$

cq selon le thm de l'encadrement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(Z_n < x) = \Phi(x)}$

5.c) Soit $a, b$ deux réels tq $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$

$P(Z_n \in [a,b]) = \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b)$

$= \mathbb{P}(Z_n \leq b) - \mathbb{P}(Z_n < a)$

⚠ on ne suppose pas que $Z_n$ est à densité donc à priori $\mathbb{P}(Z_n < a) \neq \mathbb{P}(Z_n \leq a)$

selon 2.b) $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq b) = \Phi(b)$

et selon 5.b.ii) $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n < a) = \Phi(a)$

cq par somme $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \in [a,b]) = \Phi(b) - \Phi(a)}$

<u>BILAN</u>

- Les questions 1, 2 et 3 étaient relativement accessibles et permettaient de glaner pas mal de points.
- Les questions 4 et 5 sont beaucoup plus délicates et auront sûrement posé beaucoup plus de problèmes.

4.a) et 4.d) étaient quasi infaisables. On pouvait gratter quelques points en 4.c) 5.a) i), ii) et 5.b) ii)

# PARTIE 2

6.a) $E(X_i) = 0 \cdot P(X_i=0) + 1 \cdot P(X_i=1) = p$

$E(X_i^2) = 0^2\, P(X_i=0) + 1^2 \cdot P(X_i=1) = p$

donc $Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

cl $\boxed{E(X_i) = p \quad \text{et} \quad Var(X_i) = p(1-p)}$

6.b) <u>Question classique</u>

Soit $f(x) = x(1-x)$ pour $\forall x \in [0,1]$
$= x - x^2$

$f$ est polynôme donc dérivable et $\forall x \in [0,1]$ $f'(x) = 1 - 2x$

Il vient :

| $x$ | $0$ | | $1/2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/4$ | $\searrow$ | $0$ |

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

cl $\forall x \in [0,1]$ $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

On a $p \in [0,1]$ donc $0 \leq p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et donc $0 \leq \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$

cl $\boxed{\sigma \leq \frac{1}{2}}$

6.c) $E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ (linéarité)

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p = \frac{1}{n} \times n\, p = p$

cl $\boxed{E(\bar{X}_n) = p}$

6.d) $Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2}\, Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ indépendance

$= \frac{1}{n^2} \times n \times p(1-p)$

cl $\boxed{Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} p(1-p) = \frac{1}{n} \sigma^2}$

7.a) Ici $Z_n = \sqrt{n}\,.\,\dfrac{\bar{X}_n - p}{\sigma}$ pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$

et selon 5.c) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \in [a,b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$

on a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \in [-a,a]\right) = \Phi(a) - \Phi(-a)}$

7.b)
$$
\begin{aligned}
P\left(p \in \left[\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) &= P\left(\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le p \le \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(-a\frac{\sigma}{n} \le p - \bar{X}_n \le a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad -\bar{X}_n \\
&= P\left(-a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}_n - p \le a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \times(-1) \\
&= P\left(-a \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \le a\right) \quad \times\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \\
&= P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \in [-a,a]\right)
\end{aligned}
$$

selon 7.a)
$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P\left(p \in \left[\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) &= \Phi(a) - \Phi(-a) \\
&= \Phi(a) - (1 - \Phi(a))
\end{aligned}
$$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(p \in \left[\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 2\Phi(a) - 1}$

7.c) On pose $a = 1{,}96$ alors

$$
\begin{aligned}
P\left(p \in \left[\bar{X}_n - 1{,}96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X}_n + 1{,}96.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) &\simeq 2 \times \Phi(1{,}96) - 1 \\
&\simeq 2 \times 0{,}975 - 1 \\
&\simeq 0{,}95
\end{aligned}
$$

d'où $\boxed{\text{p a environ 95\% de chances d'appartenir à l'intervalle } \left[\bar{X}_n - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$

7.d) Selon 6.b) $\sigma \le \frac{1}{2}$ donc

$$\left[\bar{X}_n - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[\bar{X}_n - 1{,}96\frac{1/2}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + 1{,}96\frac{1/2}{\sqrt{n}}\right]$$

dès lors $P\left(p\in\left[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant P\left(p\in\left[\bar{X}_n - 1,96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + 1,96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)$

$\simeq 0,95$

cl [ $p$ à approximativement plus de 95% de chances d'appartenir à $\left[\bar{X}_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right]$ ]

8.a) • $V_n - \sigma^2 - \frac{1}{n} = V_n - p(1-p) - \frac{1}{n}$

$= \bar{X}_n(1-\bar{X}_n) + \frac{1}{n} - p(1-p) - \frac{1}{n} = \bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - p(1-p)$

• $(\bar{X}_n - p)(1-\bar{X}_n - p) = \bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - p\bar{X}_n - p(1-\bar{X}_n) + p^2$

$= \bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - p\bar{X}_n - p + p\bar{X}_n + p^2$

$= \bar{X}_n(1-\bar{X}_n) - p(1-p)$

cl [ $V_n - \sigma^2 - \frac{1}{n} = (\bar{X}_n - p)(1-\bar{X}_n - p)$ ]

8.b) $V_n - \sigma^2 = (\bar{X}_n - p) + (1-\bar{X}_n - p) + \frac{1}{m}$ selon 8.a)

donc $|V_n - \sigma^2| \leqslant |(\bar{X}_n - p)(1-\bar{X}_n - p)| + \frac{1}{n}$ (inégalité triangulaire)

$\leqslant |\bar{X}_n - p|\,|1-\bar{X}_n - p| + \frac{1}{m}$

or $0 \leqslant \bar{X}_n \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -\bar{X}_n \leqslant 0$

puis $-p \leqslant 1-\bar{X}_n - p \leqslant 1-p$

et enfin $-1 \leqslant -p \leqslant 1-\bar{X}_n - p \leqslant 1-p \leqslant 1$

il vient $|1-\bar{X}_n - p| \leqslant 1$ donc $|V_n - \sigma^2| \leqslant |\bar{X}_n - p| \times 1 + \frac{1}{m}$

cl [ $|V_n - \sigma^2| \leqslant |\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} \leqslant 2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n}$ ]

8.c) On a donc $(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \subset \left(2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} > \varepsilon\right)$

et $P(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \leqslant P\left(2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} > \varepsilon\right)$ $\times\frac{1}{2}$

$\leqslant P\left(|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{2n} > \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$\leqslant P\left(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon/2 - 1/2n\right)$

cl $\boxed{P(|V_n-\sigma^2|>\varepsilon)\leq P(|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2n})}$

8.d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2n}=\frac{\varepsilon}{2}>\frac{\varepsilon}{4}$ il existe donc un rang $n_0$ tq

$\forall n\geq n_0 \quad \frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2n}>\frac{\varepsilon}{4}$

Alors $\forall n\geq n_0 \quad (|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2n})\subset(|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{4})$

puis $P(|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2n})\leq P(|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{4})$

cl $\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand on a } P(|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2n})\leq P(|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{4})}$

8.e) Selon 8.c) et 8.d) $0\leq P(|V_n-\sigma^2|>\varepsilon)\leq P(|\bar{X}_n-p|>\varepsilon/4)$

selon la loi des grands nombres (2.a) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\bar{X}_n-p|>\frac{\varepsilon}{4})=0$

cl selon le thm de l'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(|V_n-\sigma^2|>\varepsilon)=0}$

9.a) i/ Les évts $\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}>1+\varepsilon\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon\right)$ forment un SCE

selon la FPT,

$$P(W_n\leq x)=P\left(\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon\right)\cap(W_n\leq x)\right)+P\left(\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}>1+\varepsilon\right)\cap(W_n\leq x)\right)$$

$$=\underbrace{P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon\right)}_{\substack{\leq 1\\ \text{(car c'est une probabilité)}}}P_{\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon\right)}(W_n\leq x)+P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}>1+\varepsilon\right)\underbrace{P_{\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}>1+\varepsilon\right)}(W_n\leq x)}_{\leq 1}$$

donc $P(W_n\leq x)\leq P_{\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon\right)}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_n}}Z_n\leq x\right)+P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}>1+\varepsilon\right)$

$\leq P_{\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon\right)}\left(Z_n\leq\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}x\right)+P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}>1+\varepsilon\right)$

si $\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon$ alors $\left(Z_n\leq\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}x\right)\subset(Z_n\leq(1+\varepsilon)x)$

donc $P_{\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}\leq 1+\varepsilon\right)}\left(Z_n\leq\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}x\right)\leq P(Z_n\leq(1+\varepsilon)x)$

cl $\boxed{P(W_n\leq x)\leq P(Z_n\leq(1+\varepsilon)x)+P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma}>1+\varepsilon\right)}$

9.a.ii) $\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{V_n} > \sigma + \sigma\varepsilon$

$\Leftrightarrow V_n > \sigma^2 + \sigma^2\varepsilon^2$

$\Leftrightarrow V_n - \sigma^2 > \sigma^2\varepsilon^2$

or $(V_n - \sigma^2 > \sigma^2\varepsilon^2) \subset (|V_n - \sigma^2| > \sigma^2\varepsilon^2)$

on a donc $0 \leq P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) = P(V_n - \sigma^2 > \sigma^2\varepsilon^2) \leq P(|V_n - \sigma^2| > \sigma^2\varepsilon^2)$

en remplaçant $\varepsilon$ par $\sigma^2\varepsilon^2$ dans 8.e) $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|V_n - \sigma^2| > \sigma^2\varepsilon^2) = 0$

cq selon le thme de l'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) = 0}$

9.a) iii) Selon 2.b) en remplaçant $x$ par $(1+\varepsilon)x$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) = \Phi((1+\varepsilon)x)}$

9.a) iv) $P(W_n \leq x) \leq P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) + P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right)$ (9.a) i) (*)

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) + P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) = \Phi((1+\varepsilon)x)$ (9.a) ii) et iii))

et $\Phi((1+\varepsilon)x) < \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon$ car $\varepsilon > 0$

donc il existe un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq pour tt $n \geq n_\varepsilon$

$$P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) + P\left(\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} > 1+\varepsilon\right) \leq \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon \quad (**)$$

cq de (*) et (**) je déduis qu'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq pour $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\boxed{P(W_n \leq x) \leq \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon}$

9.b) on admet qu'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$

$$\Phi((1-\varepsilon)x) - \varepsilon \leq P(W_n \leq x) \leq \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi((1-\varepsilon)x) - \varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon = \Phi(x)$ car $\Phi$ est continue sur $\mathbb{R}$.

cq selon le thme de l'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n \leq x) = \Phi(x)}$

Rmq en toute rigueur, il faudrait à nouveau trouver un certain rang à partir duquel $P(W_n \leq x)$ est aussi petit que l'on veut.

10.a) $\mathbb{P}(W_n \le x) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V_n}}(\bar{X}_n - p) \le x\right)$ $\times\sqrt{V_n}$

$= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \le x\sqrt{V_n}\right)$ $\div\sqrt{n}$

$= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - p \le x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right)$

$= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \le p + x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) = \mathbb{P}\left(p \geqslant \bar{X}_n - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right)$

d selon 9.a.iv, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(p \geqslant \bar{X}_n - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(x)}$

10.b) $\bar{X}_n = 0{,}52$ $V_n = 0{,}2506$, selon 10.a) on dit que

$\mathbb{P}\left(p \geqslant \bar{X}_n - x\frac{\sqrt{V_n}}{\sqrt{n}}\right) \simeq \Phi(x)$

donc $\Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right)\right) \simeq \mathbb{P}\left(p \geqslant 0{,}52 - \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{0{,}256}}{\sqrt{1000}}\right)$

$\simeq \mathbb{P}\left(p \geqslant \frac{1}{2}\right)$

cl [La probabilité que A remporte l'élection est environ $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}2506}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}\right)$]

11.a) • si $X_i = 1$ alors $Y_i = 1$

• si $X_i = 0$ alors $Y_i = T_i = 1$ ou $0$

donc $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y_i$ suit une loi de Bernoulli

Selon la remarque précédente,

$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}((X_i = 0) \cap (T_i = 1))$

$= p + (1-p)q$ car $X_i$ et $T_i$ sont indépendants

cl $\boxed{Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p + (1-p)q)}$ donc $\boxed{r = p + (1-p)q = q + p(1-q)}$

11.b) $\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{U_n}}(\bar{Y}_n - r) \le x\right) = \mathbb{P}\left(\bar{Y}_n - r \le x \cdot \frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right)$ (car $\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}} > 0$)

$= \mathbb{P}\left(\bar{Y}_n - q - p(1-q) \le x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right)$ selon 10.a)

$= \mathbb{P}\left(p(1-q) \geqslant \bar{Y}_n - q - x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right)$

$= \mathbb{P}\left(p \geqslant \frac{1}{1-q}\left(\bar{Y}_n - q - x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right)\right)$

cl $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(p \geqslant \frac{1}{1-q}\left(\bar{Y}_n - q - x\frac{\sqrt{U_n}}{\sqrt{n}}\right)\right) = \Phi(x)}$

11.c) Pour $n$ assez grand $P\left(p \geq \frac{1}{1-q}\left(\bar{y}_n - x.\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} - q\right)\right) \simeq \Phi(x)$

on cherche $x$ tq $\frac{1}{1-q}\left(\bar{y}_n - x.\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} - q\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_n - x\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}} - q = \frac{1}{2}(1-q)$$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_n - \frac{1}{2}(1-q) - q = x\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\bar{y}_n - \frac{1}{2}(1+q)\right)$$

cl $\boxed{P\left(p \geq \frac{1}{2}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\bar{y}_n - \frac{1}{2}(1+q)\right)\right)}$

11.d) $\bar{y}_n = 0{,}52$ et $q = 0{,}04$

donc $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{u_n}}\left(\bar{y}_n - \frac{1}{2}(1+q)\right) = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{u_n}}\left(0{,}52 - \frac{1}{2}(1+0{,}04)\right) = 0$

cl $\boxed{P\left(p \geq \frac{1}{2}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}}$

BILAN

- Les questions 6 et 7 étaient très classiques. Nous avions fait des exemples très semblables en TD.
- Les questions 8 et 9 étaient très sélectives. Très peu de candidats auront réussi à tirer leur épingle du jeu.
- Il y avait matière à grater quelques points dans les questions 10 et 11 qui étaient plus accessibles.

# PARTIE III

12.a) i/ Dans $\int_0^1 u^3(1-u)^3\,du$ je pose $\begin{cases} v'(u) = u^3 \\ w(u) = (1-u)^3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} v(u) = u^4/4 \\ w'(u) = -3(1-u)^2 \end{cases}$

$v$ et $w$ sont de classe $C^1$ donc par IPP

$$\int_0^1 u^3(1-u)^3\,du = \left[\frac{u^4}{4}(1-u)^3\right]_0^1 + \frac{3}{4}\int_0^1 u^4(1-u)^2\,du$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 u^4(1-u)^2\,du$$

$$\text{IPP} \rightarrow = \frac{3}{4}\left[\frac{u^5}{5}\cdot(1-u)^2\right]_0^1 + \frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\int_0^1 u^5(1-u)\,du$$

$$= \frac{3}{10}\int_0^1 u^5(1-u)\,du$$

$$\text{IPP} \rightarrow = \frac{3}{10}\left[\frac{u^6}{6}(1-u)\right]_0^1 + \frac{3}{10}\times\frac{1}{6}\int_0^1 u^6\,du$$

cl $\boxed{\int_0^1 u^3(1-u)^3\,du = \frac{1}{20}\int_0^1 u^6\,du}$

12. a) ii/ il vient $\int_0^1 u^3(1-u)^3\,du = \frac{1}{20}\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{140}$

12. b) La fonction $x \mapsto \int_0^x u^3(1-u)^3\,du$ est continue sur $]0,1[$ car c'est une primitive de $u \mapsto u^3(1-u)^3$ qui est continue.

La fonction $h$ est donc continue sur $]0,1[$. De plus elle est clairement continue sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$.

- <u>Étude en 0</u>

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

$$h(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} 140\int_0^x u^3(1-u)^3\,du = 140\int_0^0 u^3(1-u)^3\,du = 0 \quad \text{(Chasles)}$$

donc $h$ est continue en 0

- <u>Étude en 1</u>

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \quad ; \quad h(1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} 140\int_0^x u^3(1-u)^3\,du = 140\int_0^1 u^3(1-u)^3\,du = 1 \quad (12a)ii)$$

donc $h$ est continue en 1

$\underline{\underline{cl}}$ des 3 pts précédents, [$h$ est continue sur $\mathbb{R}$]

12.c) $\forall z \in ]-\infty,0] \cup [1,+\infty[ \quad 0 \leq h(z) \leq 1$ de manière évidente.

de plus comme $x \mapsto \int_0^x u^3(1-u)^3 du$ est une primitive de $u \mapsto u^3(1-u)^3$

$h$ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall z \in ]0,1[ \quad h'(z) = 140\, z^3(1-z)^3 > 0$

donc $h$ est croissante sur $]0,1[$.

De plus $h$ est continue sur $[0,1]$ et $h(0)=0$ et $h(1)=1$. J'en déduis que $\forall z \in ]0,1[ \quad 0 \leq h(z) \leq 1$

$\underline{\underline{cl}}$ par recouvrement des cas [$\forall z \in \mathbb{R} \quad 0 \leq h(z) \leq 1$]

13.a.i) $h$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $z \mapsto z-x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc par composée $z \mapsto h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ ($a_n$ est une constante).

J'en déduis que $g_n$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\forall z \in \mathbb{R} \quad 0 \leq h(z) \leq 1$ donc $\forall z \in \mathbb{R} \quad 0 \leq h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) \leq 1$

$\times(-1)$ puis $-1 \leq -h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) \leq 0$

$+1$ et $0 \leq 1-h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) \leq 1$

$\underline{\underline{cl}}$ [$g_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{R} \quad 0 \leq g_n(z) \leq 1$].

13.a) ii) Par dérivée de composée on a :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad g_n(z) = h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right)$$

$$\text{donc } g_n'(z) = \frac{1}{a_n} h'\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right)$$

$$g_n''(z) = \frac{1}{a_n^2} h''\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right)$$

$$\left[g_n'''(z) = \frac{1}{a_n^3} h'''\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right)\right]$$

on a $a_n = n^{-1/12}$ donc $a_n^3 = n^{-1/4}$ et $\frac{1}{a_n^3} = n^{1/4}$

$\forall z \in \mathbb{R} \quad |g_n'''(z)| = n^{1/4} \left| h'''\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right)\right|$

Cl si $M_{h'''}$ est un majorant de $|h'''|$ alors [on peut choisir $M_{g_n'''}$ tq $M_{g_n'''} \leq n^{1/4} M_{h'''}$]

13.b) i) $h_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1 & \text{si } z \geq 1 \end{cases}$ et $g_n(z) = 1 - h_n\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right)$

donc $g_n(z) = 1 - 0 = 1$ si $\frac{1}{a_n}(z-x) \leq 0$

si $z \leq x$

et $g_n(z) = 1 - 1 = 0$ si $\frac{1}{a_n}(z-x) \geq 1$

si $z - x \geq a_n$

si $z \geq x + a_n$

Cl [$g_n(z) = 1$ si $z \leq x$ et $g_n(z) = 0$ si $z \geq x + a_n$]

13.b) ii) vu la question précédente, on procède par disjonction des cas.

Soit $\omega \in \Omega$

- <u>si $X(\omega) \leq x$</u> alors $\mathbb{1}_{(X \leq x)}(\omega) = 1$ ; $g_n(X(\omega)) = 1$ (selon 13.b)i))

et $\mathbb{1}_{(X \leq x + a_n)}(\omega) = 1$ (car si $X(\omega) \leq x$ alors $X(\omega) \leq x + a_n$ avec $a_n > 0$)

donc $\mathbb{1}_{(X \leq x)}(\omega) \leq g_n(X(\omega)) \leq \mathbb{1}_{(X \leq x + a_n)}(\omega)$

- <u>si $x < X(\omega) \leq x + a_n$</u> alors $\mathbb{1}_{(X \leq x)}(\omega) = 0$ ; $\mathbb{1}_{(X \leq x + a_n)}(\omega) = 1$

et $0 \leq g_n(X(\omega)) \leq 1$ d'après 13.a) i)

donc $\mathbb{1}_{(X \leq x)}(\omega) \leq g_n(X(\omega)) \leq \mathbb{1}_{(X \leq x + a_n)}(\omega)$

- <u>si $X(\omega) > x + a_n$</u> alors $\mathbb{1}_{(X \leq x)}(\omega) = \mathbb{1}_{(X \leq x + a_n)}(\omega) = 0$

et $g_n(X(\omega)) = 0$ d'après 13.b.i)

donc $\mathbb{1}_{(X \leq x)}(\omega) \leq g_n(X(\omega)) \leq \mathbb{1}_{(X \leq x + a_n)}(\omega)$

Cl par recouvrement des cas [$\mathbb{1}_{(X \leq x)} \leq g_n(X) \leq \mathbb{1}_{(X \leq x + a_n)}$]

13.c) On commence par remarquer que $\mathbb{1}_A$ est une variable de Bernoulli de paramètre $P(A)$ pour $\forall$ évt $A$.

Prenons dans 13.b.ii) $x = Z_n - a_n$ alors $g_n(Z_n - a_n) \leq \mathbb{1}_{(Z_n - a_n \leq x + a_n)}$

donc $g_n(Z_n - a_n) \leq \mathbb{1}_{(Z_n \leq x)}$

par croissance de l'intégrale $E(g_n(Z_n - a_n)) \leq E(\mathbb{1}_{(Z_n \leq x)}) = P(Z_n \leq x)$ (*)

$\uparrow$ remarque initiale

de même, si on pose $X = Z_n$ on a $\mathbb{1}_{(Z_n \leq x)} \leq g_n(Z_n)$

donc $E(\mathbb{1}_{(Z_n \leq x)}) \leq E(g_n(Z_n))$

puis $P(Z_n \leq x) \leq E(g_n(Z_n))$ (**)

cl de (*) et (**) on a $\boxed{E(g_n(Z_n - a_n)) \leq P(Z_n \leq x) \leq E(g_n(Z_n))}$

14.a) Soit $(z,u) \in \mathbb{R}^2$ dans $\int_z^{z+u} (z+u-t)^2 g'''(t)\,dt$

je pose $\begin{cases} v'(t) = g'''(t) \\ w(t) = (z+u-t)^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} v(t) = g''(t) \\ w'(t) = -2(z+u-t) \end{cases}$

les fct° $v$ et $w$ sont de classe $C^1$ donc par IPP

$$\int_z^{z+u} (z+u-t)^2 g'''(t)\,dt = \left[(z+u-t)^2 g''(t)\right]_z^{z+u} + \int_z^{z+u} 2(z+u-t) g''(t)\,dt$$

$$= 0 - u^2 g''(z) + 2\int_z^{z+u} (z+u-t) g''(t)\,dt$$

$$\text{IPP} \rightarrow = -u^2 g''(z) + 2\left[(z+u-t) g'(t)\right]_z^{z+u} + 2\int_z^{z+u} g'(t)\,dt$$

$$= -u^2 g''(z) - 2u g'(z) + 2\left[g(t)\right]_z^{z+u}$$

$$= -u^2 g''(z) - 2u g'(z) + 2g(z+u) - 2g(z)$$

cl $\boxed{\frac{1}{2}\int_z^{z+u} (z+u-t)^2 g'''(t)\,dt = -\frac{1}{2}u^2 g''(z) - u g'(z) + g(z+u) - g(z)}$

selon 14.a)

14.b) soit $(z,u,v) \in \mathbb{R}^3$ $R(z,u,v) = -\frac{1}{2}u^2 g''(z) - u g'(z) + g(z+u) - g(z)$
$- \left(-\frac{1}{2}v^2 g''(z) - v g'(z) + g(z+v) - g(z)\right)$

donc $R(z,u,v) = \frac{1}{2} g''(z)(v^2-u^2) + g'(z)(v-u) + g(z+u) - g(z+v)$

cq $\left[ g(z+u) - g(z+v) = g'(z)(v-u) + \frac{1}{2} g''(z)(u^2-v^2) + R(z,u,v) \right]$

14.c) Supposons que $u>0$ et $v>0$

$$|R(z,u,v)| = \left| \frac{1}{2} \int_z^{z+u} (z+u-t)^2 g'''(t)\,dt - \frac{1}{2} \int_z^{z+v} (z+v-t)^2 g'''(t)\,dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \int_z^{z+u} (z+u-t)^2 g'''(t)\,dt \right| + \frac{1}{2} \left| \int_z^{z+v} (z+v-t)^2 g'''(t)\,dt \right| \quad (*)$$

(*) les bornes sont dans le bon sens car $u>0$ et $v>0$

inégalité triangulaire $\rightarrow$ $\leq \frac{1}{2} \int_z^{z+u} |z+u-t|^2 |g'''(t)|\,dt + \frac{1}{2} \int_z^{z+v} |z+v-t|^2 |g'''(t)|\,dt$

Or $\forall t \in \mathbb{R}$ $|g'''(t)| \leq M_{g'''}$ donc $\int_z^{z+u} (z+u-t)^2 |g'''(t)|\,dt \leq \int_z^{z+u} (z+u-t)^2 M_{g'''}\,dt$

de plus $\int_z^{z+u} (z+u-t)^2 M_{g'''}\,dt = M_{g'''} \int_z^{z+u} (z+u-t)^2\,dt$

$$= M_{g'''} \left[ -\frac{(z+u-t)^3}{3} \right]_z^{z+u}$$

$$= M_{g'''} \frac{u^3}{3}$$

J'en déduis que $\frac{1}{2} \int_z^{z+u} (z+u-t)^2 |g'''(t)|\,dt \leq M_{g'''} \frac{u^3}{6}$

de même $\frac{1}{2} \int_z^{z+v} (z+v-t)^2 |g'''(t)|\,dt \leq M_{g'''} \frac{v^3}{6}$

cq de la première partie du raisonnement on déduit que
$|R(z,u,v)| \leq M_{g'''} \frac{u^3}{6} + M_{g'''} \frac{v^3}{6} = \frac{1}{6} M_{g'''} (u^3+v^3)$

lorsque $u$ ou $v$ est négatif, l'inégalité triangulaire amène à multiplier les intégrales par $-1$ au niveau de (*) car les bornes de l'intégrale sont alors dans le mauvais sens.

De manière générale on obtient :

$|R(z,u,v)| \leq \frac{1}{6} M_{g'''} (\pm u^3 \pm v^3)$ selon que $u$ et $v$ sont positifs ou négatifs.

cq $\left[ \text{Pour } \forall (z,u,v) \in \mathbb{R}^3 \quad |R(z,u,v)| \leq \frac{1}{6} M_{g'''} (|u|^3 + |v|^3) \right]$

15.a) i/ Les $Y_i$ sont indépendants de loi normale $N(0,1)$ donc par stabilité $Y_1+Y_2+\dots+Y_n \hookrightarrow N(0, 1+\dots+1)$

$$\text{cl} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow N(0,n)}$$

15.a.ii/ $T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ est une transformation affine d'une loi normale donc $T_n$ suit une loi normale.

$$E(T_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \quad \text{(linéarité)}$$
$$= 0$$

$$V(T_n) = \frac{1}{n} V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n} \times n = 1 \quad \text{(question précédente)}$$

$$\text{cl} \quad \boxed{T_n \hookrightarrow N(0,1)}$$

15.b) i/ • Si $k=1$

$$W_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=2}^{n} X_i + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + X_3 + \dots + X_n) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} X_2}_{\text{terme en 2}}$$
$$= W_2 + \frac{1}{\sqrt{n}} X_2$$

• Si $k=n-1$

$$W_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \dots + Y_{n-2} + X_n) + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_{n-1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i + \frac{1}{\sqrt{n}} X_n$$
$$= W_n + \frac{1}{\sqrt{n}} X_n$$

• Si $k \in \{2, \dots, n-2\}$

$$W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \dots + Y_{k-1} + X_{k+1} + \dots + X_n) + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_1 + \dots + Y_k + X_{k+2} + \dots + X_n) + \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1}$$
$$= W_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1}$$

$$\text{cl} \quad \boxed{\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \quad W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k = W_{k+1} + \frac{1}{\sqrt{n}} X_{k+1}}$$

15.b.ii/ Erreur d'énoncé !

$$\sum_{k=1}^{\cancel{n-1}\, n} \left(g_n\left(W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} X_k\right) - g_n\left(W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} g_n\left(W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} X_k\right) - \sum_{k=1}^{n} g_n\left(W_k + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right) - \sum_{k=1}^{n-1} g_n\left(W_{k+1}+\frac{1}{\sqrt{n}}X_{k+1}\right) - \underbrace{g_n\left(W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n\right)}_{\text{terme en } n}$$

15.b.i/

$i=k+1$

$$= \sum_{k=1}^{n} g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right) - \sum_{i=2}^{n} g_n\left(W_i+\frac{1}{\sqrt{n}}X_i\right) - g_n\left(W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n\right)$$

télescopage

$$= g_n\left(W_1+\frac{1}{\sqrt{n}}X_1\right) - g_n\left(W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n\right)$$

or $W_1+\frac{1}{\sqrt{n}}X_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n}X_k + \frac{1}{\sqrt{n}}X_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k = Z_n$

et $W_n+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}Y_k + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}Y_k = T_n$

cqfd $\left[\sum_{k=1}^{n}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right) = g_n(Z_n)-g_n(T_n)\right]$

15. c) i/ $W_k = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1+\dots+Y_{k-1}+X_{k+1}+\dots+X_n)$

les variables $Y_1,\dots,Y_k,X_k,\dots,X_n$ sont indépendants donc selon le lemme de coalition $X_k-Y_k$ est indépendante de $W_k$ et donc de $g_n'(W_k)$

Dès lors $\mathbb{E}((X_k-Y_k)g_n'(W_k)) = \mathbb{E}(X_k-Y_k)\cdot\mathbb{E}(g_n'(W_k))$

de plus $\mathbb{E}(X_k-Y_k) = \mathbb{E}(X_k)-\mathbb{E}(Y_k) = 0-0 = 0$ selon les hypothèses.

cqfd $\left[\mathbb{E}((X_k-Y_k)g_n'(W_k))=0\right]$

15.c.ii/ de même $\mathbb{E}((X_k^2-Y_k^2)g_n''(W_k)) = \mathbb{E}(X_k^2-Y_k^2)\mathbb{E}(g_n''(W_k))$

avec $\mathbb{E}(X_k^2-Y_k^2) = \mathbb{E}(X_k^2)-\mathbb{E}(Y_k^2)$

$= V(X_k)+\mathbb{E}(X_k)^2 - V(Y_k)-\mathbb{E}(Y_k)^2$ } Koenig-Huygens

$= 1+0-1-0 = 0$

cqfd $\left[\mathbb{E}((X_k^2-Y_k^2)g_n''(W_k))=0\right]$

15.c.iii/ Selon 13.b) $\forall (z,u,v)\in\mathbb{R}^3$

$$g_n(z+u)-g_n(z+v) = g_n'(z)(u-v)+g_n''(z)\frac{1}{2}(u^2-v^2)+R(z,u,v)$$

donc $\forall k\in[\![1,n]\!],\ g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right) = g_n'(W_k)\frac{1}{\sqrt{n}}(X_k-Y_k)+\frac{1}{2}g_n''(W_k)\cdot\frac{1}{n}(X_k^2-Y_k^2)$
$+R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)$

par linéarité de l'espérance et selon 15.c.ii/

On a donc $\boxed{\mathbb{E}\left(g_m\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)=R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right.}$
pour tt $k\in[\![1,n]\!]$

15.d) Selon 15.b.ii/

$$\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n)-g_n(T_m)\right|=\left|\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(g_m\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_m\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)\right|$$

donc (linéarité)

$$\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n))-\mathbb{E}(g_m(T_m))\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(g_n\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right)-g_m\left(W_k+\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)\right|$$

puis selon 15.c.iii/

$$\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n))-\mathbb{E}(g_m(T_m))\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}\mathbb{E}\left(R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right)\right|$$

Enfin, selon l'inégalité triangulaire

$$\boxed{\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n))-\mathbb{E}(g_m(T_m))\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\right)}$$

on admet que $|\mathbb{E}(X)|\leq\mathbb{E}(|X|)$ pour tte V.A admettant une espérance.

15.e) selon 14.c)

$$\left|R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\leq\frac{1}{6}M_{g'''}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}X_k\right|^3+\left|\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right|^3\right)$$

donc par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\left|R\left(W_k,\frac{1}{\sqrt{n}}X_k,\frac{1}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right|\right)\leq\frac{1}{6}M_{g'''}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\left(\mathbb{E}(|X_k|^3)+\mathbb{E}(|Y_k|^3)\right)$$

en additionnant termes et à termes et selon 15.d)

$$\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n))-\mathbb{E}(g_n(T_m))\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}M_{g''''}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\left(\mathbb{E}(|X_k|^3)+\mathbb{E}(|Y_k|^3)\right)$$

les $X_k$ suivent la même loi que $X_1$ et les $Y_k$ suivent la même loi que $Y_1$ donc :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n))-\mathbb{E}(g_n(T_m))\right|&\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}M_{g''''}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\left(\mathbb{E}(|X_1|^3)+\mathbb{E}(|Y_1|^3)\right)\\&=m\times\frac{1}{6}M_{g'''}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\left(\mathbb{E}(|X_1|^3)+\mathbb{E}(|Y_1|^3)\right)\\&=\frac{1}{6\sqrt{n}}M_{g'''}\left(\mathbb{E}(|X_1^3|)+\mathbb{E}(|Y_1^3|)\right)\end{aligned}$$

cl $\boxed{\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n))-\mathbb{E}(g_n(T_m))\right|\leq\frac{1}{6\sqrt{n}}M_{g'''}\left(\mathbb{E}(|X_1^3|)+\mathbb{E}(|Y_1^3|)\right)}$

15.f. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{6\sqrt{n}}M_{g'''}\left(\mathbb{E}(|X_1^3|)+\mathbb{E}(|Y_1^3|)\right)=0$ et $\left|\mathbb{E}(g_n(Z_n))-\mathbb{E}(g_m(T_m))\right|\geq 0$

donc selon le thm de l'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\mathbb{E}(g_m(Z_n))-\mathbb{E}(g_m(T_m))\right|=0}$

16.a) Selon 13.i) $E(g_n(Z_n-a_n)) \leq P(Z_n \leq x) \leq E(g_n(Z_n))$ pour tt réel $x$

où $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $(X_i)$ des v.a indépendantes de même espérance 0 et de même variance 1.

Les VA $(Y_i)$ vérifient ces hypothèses et $T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ vérifie donc l'inégalité :

$$E(g_n(T_n-a_n)) \leq P(T_n \leq x) \leq E(g_n(T_n))$$

on a donc $P(T_n \leq x) \leq E(g_n(T_n))$ et en remplaçant $T_n$ par $T_n+a_n$

$$E(g_n(T_n)) \leq P(T_n+a_n \leq x) = P(T_n \leq x-a_n)$$

$\underline{\underline{cq}}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad P(T_n \leq x) \leq E(g_n(T_n)) \leq P(T_n \leq x-a_n)}$

16.b) $T_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ selon 15.a) ii, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) \leq E(g_n(T_n)) \leq \Phi(x-a_n)$$

de plus $a_n = n^{-1/12} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par continuité de $\Phi$ $\lim_{n\to+\infty} \Phi(x-a_n) = \Phi(x)$

$\underline{\underline{cq}}$ selon le thme de l'encadrement $\lim_{n\to+\infty} E(g_n(T_n)) = \Phi(x)$

16.c) $\lim_{n\to+\infty} |E(g_n(Z_n)) - E(g_n(T_n))| = 0$ (15.f)) et $\lim_{n\to+\infty} E(g_n(T_n)) = \Phi(x)$ (16.b))

$\underline{\underline{cq}}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(g_n(Z_n)) = \Phi(x)}$

<u>BILAN</u>

Il y avait pas mal de questions accessibles pour les étudiants qui s'étaient organisés pour arriver jusque là.

- les manipulations de la question 12
- la question 14
- la question 15.a)

Le reste était plus technique et le temps n'a ra permis à aucun (ou très peu) des candidats de se mettre en valeur.

BILAN GENERAL

Ce sujet était bien fait. Il permettait aux étudiants sérieux de montrer leurs qualités. La qualité de la rédaction des questions accessibles jouera sans doute un rôle important.
On peut regretter la présence d'un trop grand nombre de questions extrêmement techniques qui auront sans doute joué un rôle très discriminant.
Pour finir, je trouve que le sujet n'était pas très intéressant. Le lien entre les parties était faible. La démonstration du TLC dans la partie II était très partielle et peu intéressante.