Exercice 1

1. On tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. X est le numéro tiré.

On a donc $\left[X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]) \right]$ ie $\begin{cases} X(\Omega) = [\![1,n]\!] \\ \forall k \in [\![1,n]\!] \quad P(X=k) = \frac{1}{n} \end{cases}$

$\left[E(X) = \frac{n+1}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12} \right]$

2. Les boules placées dans la seconde urne portent des numéros de 1 à k où k est la valeur de X.

Comme $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ les boules placées dans la seconde urne portent des numéros pouvant aller de 1 à n

ie $\left[Y(\Omega) = [\![1,n]\!] \right]$

3. * si $j \geq k+1$ $\quad P_{(X=k)}(Y=j) = 0$ puisque les boules placées dans la seconde urne portent des numéros allant de 1 à k.

* si $j \leq k$
  - le nombre de boules n° j est j
  - le nbre total de boules est $1+2+\ldots+k = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

Par équiprobabilité des tirages $\left[P_{(X=k)}(Y=j) = \frac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2j}{k(k+1)} \right]$

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$

il suffit donc de prendre $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

ie $\left[\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$

4. b) Les évènements $(X=k)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ forment un SCE.

Selon la FPT

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad P(Y=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k) P_{(X=k)}(Y=j)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} P(X=k) P_{(X=k)}(Y=j)}_{=0} + \sum_{k=j}^{n} P(X=k) P_{(X=k)}(Y=j)$$

$$= \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{k(k+1)}$$

il vient $P(Y=j) = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ d'après 4.a)

$$= \frac{2j}{n}\left[\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k+1}\right] \quad i=k+1$$

$$= \frac{2j}{n}\left[\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=j+1}^{n+1} \frac{1}{i}\right]$$

$$= \frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{2j}{n} \times \frac{n+1-j}{j(n+1)} = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

cl $\left[\forall j \in [\![1,n]\!] \quad P(Y=j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}\right]$

5. $Y(\Omega)$ est fini donc Y admet une espérance.

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\, P(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j \cdot 2(n+1-j)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\left(\sum_{j=1}^{n} j(n+1) - \sum_{j=1}^{n} j^2\right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2\right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\left[\frac{n(n+1)}{2}\left(n+1 - \frac{2n+1}{3}\right)\right]$$

$$= n+1 - \frac{2n+1}{3}$$

$$= \frac{3n+3-(2n+1)}{3} = \frac{n+2}{3}$$

cl Y admet une espérance et $\left[E(Y) = \frac{n+2}{3}\right]$

6. si $j \geq k+1$ $P_{(X=k)}(Y=j) = 0$ alors que $P(Y=j) \neq 0$

cl [X et Y ne sont pas indépendantes]

7.a) X et Y sont à support fini donc XY admet une espérance.

On a $$E(XY) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} kj\, P((X=k) \cap (Y=j))$$

Il vient $E(XY)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kj\, P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{k} kj\, P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j) + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} kj\, P(X=k)P_{(X=k)}(Y=j)}_{=0}\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2j}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n(k+1)}\sum_{j=1}^{k} j^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n\cancel{(k+1)}}\cdot\frac{k\cancel{(k+1)}(2k+1)}{6}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{k(2k+1)}{3n}$$

$$= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)$$

$$= \frac{1}{3n}\Big(2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\Big)$$

$$= \frac{1}{3n}\Big(2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\Big)$$

$$= \frac{1}{3n}\times n(n+1)\Big(\frac{2(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\Big)$$

$$= \frac{(n+1)}{3}\Big(\frac{4n+2+3}{6}\Big)$$

$$= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}$$

d'où $\boxed{E(XY)=\frac{(n+1)(4n+5)}{18}}$

7.b) XY admet une espérance et X et Y également donc (X,Y) admet une covariance

et $\text{cov}(X,Y)= E(XY)-E(X)E(Y)$

$$= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{3(n+1)(n+2)}{18}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+5-3(n+2))}{18} = \frac{(n+1)(n-1)}{18}$$

d'où $\boxed{\text{cov}(X,Y)=\frac{n^2-1}{18}}$

8.a)
```python
def seconde_urne(k):
    L=[]   # liste vide
    for j in range(1,k+1):      # pour j compris entre 1 et k
        for i in range(j):
            L.append(j)      # on rajoute j boule n° j
    return L
```

8.b)
```python
import numpy.random as rd
def simul_XY(n):
    X = rd.randint(1,n+1)     # loi uniforme sur [[1,n]]
    urne2 = seconde_urne(X)
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0,nb)      # on tire au hasard une boule de la 2nd urne
    Y = urne2(i)              # représentée par urne 2
    return X,Y
```

8.c) On simule 10000 fois l'expérience. j= simul_XY(n)[1] représente la valeur de Y. On ajoute alors à liste[j-1] la valeur $\frac{1}{10000}$

Les éléments de liste sont donc les fréquences d'obtention de $(Y=1), (Y=2), \dots$

cl selon la loi faible des grands nombres la liste renvoyée permet d'approcher les valeurs de $\mathbb{P}(Y=1), \mathbb{P}(Y=2), \dots, \mathbb{P}(Y=n)$

9.a) D'après la loi faible des grands nombres le point moyen du nuage est environ de coordonnées $(E(X), E(Y))$

$n=20$ donc $E(X) = \frac{20+1}{2} = \frac{21}{2} \simeq 10{,}5$ $\qquad E(Y) = \frac{20+2}{3} = \frac{22}{3} \simeq 7{,}33$

cl [On peut approcher le point moyen du nuage par $(10{,}5 \,;\, 7{,}33)$]

9.b)
- Le point moyen du nuage est un point de la droite de régression linéaire. Ce n'est pas le cas sur la figure 1.
- Sur la figure 2 Tous les points sont en dessous de la droite. Cette droite n'approche pas correctement le nuage.
- $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{20^2-1}{18} > 0$ donc lorsque X augmente Y aussi. La droite de la figure 4 n'est donc pas correcte.

cl [La figure correcte est la figure 3]

BILAN

Un exercice de probas discrètes relativement classique. On avait fait un exercice assez semblable en TD (TD 9 - ex 3)

On peut regretter que la réponse à la question 3.b) demandant $P_{(X=k)}(Y=j)$ ne soit pas donnée. Cela bloquait les candidats pour les questions 4.b) et 7.a)

Il fallait penser à donner son cours pour gratter quelques points.

La question d'info 8.a) était de difficulté déraisonnable. Les autres étaient plus accessibles.

Exercice 2

1. a) $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et ne s'annule pas

$x \mapsto e^{x/2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Par quotient de fonctions dérivables f est dérivable sur $]0,+\infty[$

Posons $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = e^{x/2}$. On a $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$

Il vient pour tt $x>0$ $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}e^{x/2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x/2}}{(\sqrt{x})^2}$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$= \frac{x-1}{2x} \cdot \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

cl $\left[f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x) \right]$

1. b) • $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{x/2} = e^0 = 1$ donc par produit $\left[\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \right]$

• Posons $h = \frac{x}{2}$ et $x = 2h$ $\quad \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} = \frac{e^h}{\sqrt{2h}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^h}{h^{1/2}}$

lorsque $x \to +\infty$ $h \to +\infty$ donc $\left[\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{h \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^h}{h^{1/2}} = +\infty \right]$ selon le TCC

• $\forall x \in]0,+\infty[$ $f(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\frac{x-1}{2x}$

On a donc $f'(x) > 0 \iff \frac{x-1}{2x} > 0$

$\iff x - 1 > 0$

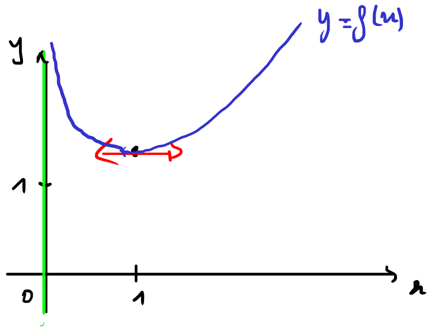
$\iff x > 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{1}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

1.c) On a une asymptote verticale en 0 d'équation $x=0$

et une tangente horizontale en $(1,\sqrt{e})$



Rmq il aurait fallu que l'énoncé admette la convexité de f. Ici on ne peut que conjecturer l'allure de la branche infinie en $+\infty$

1.d) f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0,1[$.

Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]\sqrt{e},+\infty[$

Si $n\geqslant 2$ alors n appartient à l'intervalle d'arrivée (car $e<4$ donc $\sqrt{e}<2$)

donc l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution u_n sur $]0,1[$

De la même manière f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]\sqrt{e},+\infty[$

donc l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution v_n sur $]1,+\infty[$

cl [Pour tt $n\geqslant 2$ l'équation $f(x)=n$ admet exactement deux solutions u_n et v_n telles que $0<u_n<1<v_n$]

2.a) Soit $n\geqslant 2$ $\qquad v_{n+1}\geqslant v_n \iff f(v_{n+1})\geqslant f(v_n)$ (car f est croissante strict. sur $]1,+\infty[$)

$\iff n+1\geqslant n$

c'est vrai donc par équivalence $v_{n+1}\geqslant v_n$

cl [$(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante]

Rmq on aurait aussi pu remarquer que $v_n = f^{-1}(n)$ où f^{-1} est croissante selon le thme de la bijection.

2.b) (v_n) est croissante donc, selon le théorème de la limite monotone, elle admet une limite.

Si (v_n) ne tend pas vers $+\infty$ alors (v_n) admet une limite finie ℓ.

Or $\forall n\geqslant 2$ $f(v_n)=n$ $\quad$ par continuité de f on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)=f(\ell)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n = f(\ell)$

c'est absurde donc $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty\right]$

Rmq on aurait pu plus simplement remarquer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$$

Mais le raisonnement par l'absurde était imposé.

3.a) soit $n \geqslant 2$ $\quad u_{n+1} \leq u_n \iff f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ (car f est décroissante strict sur $]0,1[$)

$$\iff n+1 \geqslant n$$

C'est vrai donc par équivalence $u_{n+1} \leq u_n$

cl $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante}}$

3.b) (u_n) est décroissante et minorée donc selon le thme de la limite monotone $\boxed{(u_n) \text{ cvge vers une limite } \ell}$

3.c) Supposons que $\ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell) = \dfrac{e^{\ell/2}}{\sqrt{\ell}}$

or $f(u_n) = n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \dfrac{e^{\ell/2}}{\sqrt{\ell}}$ c'est absurde

cl $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Rmq là encore on aurait pu utiliser f^{-1}

3.d) on revient à la définition de u_n

$\forall n \geqslant 2 \quad f(u_n) = n$ donc $\dfrac{e^{u_n/2}}{\sqrt{u_n}} = n$

puis $e^{u_n/2} = n\sqrt{u_n}$

et donc $e^{u_n/2} = n^2 u_n$

Enfin $\lim u_n = 0$ donc par composée $\lim e^{u_n/2} = e^0 = 1$

cl $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1}$ on a donc $n^2 u_n \sim 1$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n^2}}$

4.a)

```
def aprox_u(n,eps):
    a=0
    b=1
    while b-a>eps :
        c=(a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c)<n :
            b=c
        else :
            a=c
    return (a+b)/2
```

4.b)

```
def sp(N,eps):
    S = 0
    for i in range(2,N+1):
        S = S + aprox(i, eps/N)
    return S
```

Rmq : un très classique calcul de somme. Attention cependant, les erreurs d'approximation s'ajoutent ! Pour une valeur approchée de la somme à ε près il faut approcher chaque u_n à $\frac{\varepsilon}{N}$ près.

BILAN

La dérivée étant donnée dans l'énoncé l'étude de la fonction ne présentait pas de difficulté majeure.
L'étude des suites implicites était très guidée donc accessible.
Les questions d'informatique étaient abordables en dehors de la subtilité du ε/N en 4.b) qui n'aura été vue par quasiment aucun candidat.

Exercice 3

1. a) $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tq $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \vec{0}_{\mathbb{R}^4}$ (E)

$(E) \Leftrightarrow \lambda_1(-1,1,0,1) + \lambda_2(0,-1,1,0) + \lambda_3(0,1,1,0) + \lambda_4(1,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_2 + L_3$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

cl $\mathcal{B}$ est libre et $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^4)$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$

1. b) • $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(u_1) = 0$

• $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(u_2) = 0$

• $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(u_3) = 2u_3$

• $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $f(u_4) = u_3 + 2u_4$

cl
$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \\ /u_4 \end{matrix}}$$

1.c) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à $\mathcal{B}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

selon la formule de changement de base $P^{-1}AP = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$

cl [Selon 1.b) si l'on pose $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a $A = PTP^{-1}$]

2.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

donc $4A^2 - 4A = 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^3$

cl [$A^3 = 4A^2 - 4A$]

Rmq c'est dommage que la question soit fermée par "calculer A^2 et A^3"
on aurait pu aussi montrer que $A^3 = 4A^2 - 4A$ en passant par la question
1.c) et la parallèle matrice/endomorphisme

2.b) Soit $\mathcal{P}(n)$ la p^té "il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tq $A^n = a_n A^2 + b_n A$"

* Initialisation

$\mathcal{P}(1)$ est la propriété "il existe a_1 et b_1 tq $A^1 = a_1 A^2 + b_1 A$"
c'est vrai quitte à prendre $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$

* Hérédité

soit $n \geq 1$ un entier fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$

Par HdR il existe a_n et b_n tq $A^n = a_n A^2 + b_n A$

Alors $A^{n+1} = A^n . A$

$= (a_n A^2 + b_n A).A$

$= a_n A^3 + b_n A^2$

$= a_n (4A^2 - 4A) + b_n A^2$) selon 2.a)

$= (4a_n + b_n) A^2 - 4a_n A$

$= a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A$ où $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

* cl [selon le principe de récurrence il existe deux suites (a_n) et (b_n)
telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A^n = a_n A^2 + b_n A$]

3.a) Pour tt $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - b_{n+1}$

$$= 4a_{n+1} + 4a_n \quad \text{d} \quad b_{n+1} = -4a_n$$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} + 4a_n}$

3.b) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit l'équation $x^2 = 4x + 4 \iff x^2 - 4x - 4 = 0$

$\Delta = 0$ donc il y a une solution $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

Il existe donc deux constantes λ et μ telles que

$$\forall n \geq 1 \quad a_n = \lambda . 2^n + n\mu . 2^n$$

on a $a_1 = 0$ et $a_2 = 4a_1 - b_1 = 1$ (car $b_1 = 1$)

donc $\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 4\lambda + 8\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 0 \\ 4\mu = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -1/4 \\ \mu = \frac{1}{4} \end{cases}$$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{-1}{4} . 2^n + \frac{n}{4} 2^n = \frac{n-1}{4} . 2^n}$ $\quad$ je remplace n par $n-1$

3.c) Pour tt $n \geq 1$ $\quad b_{n+1} = -4a_n$ donc pour tt $n \geq 2$ $\quad b_n = -4a_{n-1}$

$$= -4 . \frac{n-2}{4} 2^{n-1}$$

$$= -(n-2) 2^{n-1}$$

cela reste vrai pour $n = 1$ car $b_1 = 1$ et $-(1-2) 2^{1-1} = 1$

cl $\boxed{\forall n \geq 1 \quad b_n = -(n-2) 2^{n-1}}$

Rmq on aurait aussi pu écrire que $b_n = a_{n+1} - 4a_n$

4. $\forall n \geq 1 \quad A^n = a_n A^2 + b_n A$

$$= \frac{n-1}{4} 2^n \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2) 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (n-1)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1} \\ 3(n-1)2^{n-2} & (n-1)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 3(n-1)2^{n-2} & (n-1)2^{n-1} & (n-1)2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n-1)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-1)2^{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-2)2^{n-1} \\ (n-2)2^{n-1} & (n-2)2^{n-1} & (n-2)2^{n-1} & 0 \\ (n-2)2^{n-1} & (n-2)2^{n-1} & (n-2)2^{n-1} & 0 \\ (n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & (n-2)2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \geqslant 1 \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)\,2^{n-1}\,* & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)\,2^{n-2} \\ (n+1)\,2^{n-1}\,* & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)\,2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

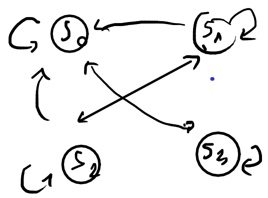
$$* \quad 3(n-1)2^{n-2} - (n-2)2^{n-1} = 3(n-1)\,2^{n-2} - 2(n-2)\,2^{n-2}$$
$$= (3n-3-2n+4)\,2^{n-2} = (n+1)\,2^{n-2}$$

5.a) La matrice d'adjacence du graphe est la matrice carrée d'ordre p dont les coefficients (i,j) sont les nombres d'arêtes reliant les sommets i et j.

⚠ Ici les sommets étant numérotés de 0 à $p-1$ la matrice d'adjacence de G est la matrice $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ telle que m_{ij} est le nombre de sommets reliant les sommets s_{i-1} et s_{j-1}

5.b) le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne - $j^{\text{ème}}$ colonne de M^n est le nombre de chemins de longueur n reliant s_{i-1} à s_{j-1}

6.a)



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \end{array}$$

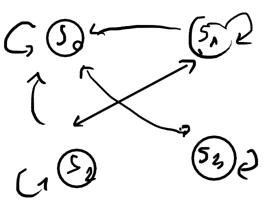
6.b) Le graphe n'est pas connexe car, par exemple, il n'est pas possible de relier les sommets s_0 et s_2

6.c) le nbre de chemins reliant s_3 à s_0 est d'après 5.b) le coefficient de la $4^{\text{ème}}$ ligne $1^{\text{ère}}$ colonne de A^n : 2^{n-1}

7.
```
def matrice-vers-liste(M):
    L = []
    p = len(M)
    for i in range(p):          # pour tt i ∈ [0,p-1]
        l = []
        for j in range(p):
            if M[i][j] != 0:
                l.append(j)
        L.append(l)
    return L
```

fabrication de la liste des sommets adjacents à s_i

7.a)



- le plus court chemin de s_1 à s_0 est $s_1 \to s_0$
- le plus court chemin de s_1 à s_2 est $s_1 \to s_2$
- le plus court chemin de s_1 à s_3 est $s_1 \to s_0 \to s_3$

Le [distances = [1, 0, 1, 2]]

8.b)

```
def parcours(L,io):
    p= len(L)
    distances=[p]*p      # toutes les distances sont initialisées à p sauf
    distances[io]=0      # la distance de io
    a_explorer = [io]
    marques = [io]
    while len(a_explorer)>0 :      # tant que la liste n'est pas vide
        s= a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s] :            # pour tt sommet voisin de s
            if v not in marques :
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)       # on ajoute v à a_explorer
                distances[v] = distances[s]+1  # on lui affecte la distance
                                               # distance[s]+1
    return distances
```

8.c) S'il existe un chemin entre s_i et s alors il est de longueur maximale $p-1$ (s'il passe par tous les autres sommets). Or on a initialisé les distances à p. S'il n'y a pas de chemin entre si et s la valeur distances[s] reste égale à p. Il suffit donc d'ajouter à la place de return distances :

```
    L=[]
    for k in range(p):
        if distances[k]<p :
            L.append(k)
    return L
```

BILAN

Le début de l'exercice était facile.

La récurrence du 2.b) était plus délicate. Fait rare, c'était la seule récurrence du sujet.

La partie B sur les graphes aura sûrement fait plus de dégats. Les questions 5 et 6 étaient des questions de cours. Encore fallait il avoir revu le cours de première année sur les graphe !

La question 7 était de difficulté déraisonnable. La question 8 pouvait être faite sans rien comprendre mais juste en suivant la démarche de l'énoncé.

BILAN général

Le sujet était beaucoup plus court que les années précédentes (45 questions)
Les étudiants sérieux auront pu aborder les premières questions de chaque exercice et mettre en avant leurs qualités.
Il y avait beaucoup de questions d'informatique. Mais certaines étaient très abordables ou très guidées. Même sans maitriser cette partie du programme on pouvait gagner des points sur ces questions.
Vu la longueur du sujet il faudra avoir traité une grande partie du sujet pour avoir une très bonne note.
Enfin on peut regretter que le sujet ne porte presque que sur le programme de 1ère année (pas de densités, pas de diagonalisation, pas de systèmes diff. pas de séries, pas d'intégrales). C'est un peu vache pour les khube de faire une partie complète sur les graphes.