PARTIE I

1.a) Soit $x \geq 0$ et $t \in [x, +\infty[$ on a $0 \leq x \leq t$

donc $0 \leq x\varphi(t) \leq t\varphi(t)$) $\varphi(t) > 0$

les intégrales $\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$ et $\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$ convergent par pté des densités et de l'espérance d'une v.A à densité.

Donc en intégrant termes à termes $0 \leq \int_x^{+\infty} x\varphi(t)\,dt \leq \int_x^{+\infty} t\varphi(t)dt$

- d'une part $\int_x^{+\infty} x\varphi(t)dt = x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = x(1-\Phi(x))$
- d'autre part $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ donc $\varphi'(t) = -t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$

$= -t\varphi(t)$

Donc $\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt = \int_x^{+\infty} -\varphi'(t)dt$

$= \lim\limits_{A\to+\infty} [-\varphi(t)]_x^A$

$= \lim\limits_{A\to+\infty} -\varphi(A) + \varphi(x)$

$= \varphi(x)$ car $\varphi(A) = e^{-A^2/2} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

cl $\left[\forall x \geq 0 \quad 0 \leq x(1-\Phi(x)) \leq \varphi(x) \right]$

1.b) Soit $x \leq 0$ et $t \in]-\infty, x]$ on a $t \leq x \leq 0$

donc $t\varphi(t) \leq x\varphi(t) \leq 0$

en intégrant termes à termes

$$\int_{-\infty}^x t\varphi(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^x x\varphi(t)\,dt \leq 0$$

Avec $\int_{-\infty}^x x\varphi(t)\,dt = x\int_{-\infty}^x \varphi(t)\,dt = x\Phi(x)$

et $\int_{-\infty}^x t\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^x -\varphi'(t)\,dt$

$= \lim\limits_{A\to-\infty} [-\varphi(t)]_A^x$

$= \lim\limits_{A\to-\infty} -\varphi(x) + \varphi(A) = -\varphi(x)$

cl $\left[\forall x \leq 0 \quad -\varphi(x) \leq x\Phi(x) \leq 0 \right]$

1.c) $\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt$ est impropre en $-\infty$. Posons $I(A)=\int_A^x \Phi(t)\,dt$ avec $A<0$

on pose $\begin{cases} u(t)=\Phi(t) \\ v'(t)=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t)=\varphi(t) \\ v(t)=t \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par IPP

$$I(A)=\left[t\Phi(t)\right]_A^x-\int_A^x t\varphi(t)\,dt$$

$$= x\Phi(x)-A\Phi(A)+\int_A^x \varphi'(t)\,dt$$

$$= x\Phi(x)-A\Phi(A)+\left[\varphi(t)\right]_A^x$$

$$= x\Phi(x)-A\Phi(A)+\varphi(x)-\varphi(A)$$

Enfin $\lim_{A\to-\infty}\varphi(A)=0$

et selon 1.b) pour $A<0$ $\quad -\varphi(A)\leq A\Phi(A)\leq 0$

donc selon le thme de l'encadrement $\lim_{A\to-\infty} A\Phi(A)=0$

$\underline{\text{cl}}$ $\lim_{A\to-\infty} I(A)=x\Phi(x)+\varphi(x)$ donc $\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)\,dt$ converge et

$$\left[\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)\,dt=x\Phi(x)+\varphi(x)\right]$$

Posons de même $J(A)=\int_x^A (1-\Phi(t))\,dt$ avec $A\geq 0$

Par intégration par parties

$$J(A)=\left[t(1-\Phi(t))\right]_x^A+\int_x^A t\varphi(t)\,dt$$

$$= A(1-\Phi(A))-x(1-\Phi(x))-\int_x^A \varphi'(t)\,dt$$

$$= A(1-\Phi(A))-x(1-\Phi(x))-\left[\varphi(t)\right]_x^A$$

$$= A(1-\Phi(A))-x(1-\Phi(x))-\varphi(A)+\varphi(x)$$

$\lim_{A\to+\infty}\varphi(A)=0$ et selon 1.a) pour $A\geq 0$ $\quad 0\leq A(1-\Phi(A))\leq\varphi(A)$

donc selon le thme de l'encadrement $\lim_{A\to+\infty} A(1-\Phi(A))=0$

$\underline{\text{cl}}$ $\left[\int_x^{+\infty}(1-\Phi(t))\,dt \text{ cvge et vaut } -x(1-\Phi(x))+\varphi(x)\right]$

2.a) Par hypothèse $\forall x \in \mathbb{R} \ |h'(x)| \leq 1$

Donc selon l'inégalité des accroissements finis

$$\left[\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |h(x) - h(y)| \leq |x-y|\right]$$

En posant $y = 0$ $\quad |h(x) - h(0)| \leq x$

donc $\quad -x \leq h(x) - h(0) \leq x$

puis $\quad -x + h(0) \leq h(x) \leq x + h(0)$

Enfin $\quad -|h(0)| \leq h(0) \leq |h(0)|$ et $x \leq |x|$ et $-x \geq -|x|$

donc $\quad -|x| - |h(0)| \leq h(x) \leq |x| + |h(0)|$

ie $\quad |h(x)| \leq |x| + |h(0)|$

cqfd $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad |h(x)| \leq |x| + |h(0)|\right]$

2.b) • $\forall t \in \mathbb{R} \quad |h'(t)| \leq 1$

donc $|h'(t)| \, \Phi(t) \leq \Phi(t)$ $\quad \& \ \Phi(t) \geq 0$

ie $\quad |h'(t) \Phi(t)| \leq \Phi(t)$

• $\int_x^{+\infty} \Phi(t) \, dt$ cvge selon 1.c)

• les intégrales sont ATP

[cqfd selon le thm de comparaison $\int_x^{+\infty} |h'(t) \Phi(t)| \, dt$ cvge

donc $\int_x^{+\infty} h'(t) \Phi(t) \, dt$ cvge absolument donc converge.]

Posons $I(A) = \int_A^x h'(t) \Phi(t) \, dt$ avec $A \leq x$

$$= \left[h(t) \Phi(t)\right]_A^x - \int_A^x h(t) \varphi(t) \, dt \qquad \text{(IPP)}$$

$$= h(x) \Phi(x) - h(A) \Phi(A) - \int_A^x h(t) \varphi(t) \, dt$$

• $0 \leq |h(A) \Phi(A)| \leq (|A| + |h(0)|) \Phi(A)$ (selon 2.a))

$$\leq |A| \Phi(A) + |h(0)| \Phi(A)$$

or $\lim\limits_{A \to -\infty} \Phi(A) = 0$ (pté des fct de répartition)

et $\lim\limits_{A \to -\infty} A \Phi(A) = 0$ (comme dans 1.c))

donc selon le thm d'encadrement $\lim\limits_{A \to -\infty} h(A) \varphi(A) = 0$

comme $\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt$ cvge on en déduit que $\int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)\,dt$ converge

et par passage à la limite $\boxed{\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt = h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)\,dt}$

2.c) Selon 2.b) pour $\forall x \in \mathbb{R}$

$$-\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$$

$$= -h(x)\Phi(x) + \int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)\,dt - h(x)(1-\Phi(x)) + \int_{x}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= -h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\,dt \quad (\text{Chasles})$$

$$= -h(x) + E(h(N)) \quad (\text{théorème de transfert})$$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad -\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt = c_h - h(x)}$

3.a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = \dfrac{\Phi(x)}{\varphi(x)}$ et Φ et φ sont dérivables donc θ est dérivable

et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta'(x) = \frac{\Phi'(x)\varphi(x) - \Phi(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}$$

$$= \frac{\varphi(x)^2 + \Phi(x)\, x\varphi(x)}{(\varphi(x))^2} \qquad \text{car } \varphi'(x) = -x\varphi(x)$$

$$= 1 + x\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} = 1 + x\theta(x)$$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta'(x) = 1 + x\theta(x)}$

$x \mapsto x$ et $x \mapsto \theta(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc θ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta''(x) = 1.\theta(x) + x\,\theta'(x)$

$$= \theta(x) + x(1 + x\theta(x))$$

$$= x + (1+x^2)\theta(x)$$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(-x) = \dfrac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)} = \dfrac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)}$ par parité de φ et pté de Φ

donc $\theta(-x)\Phi(x) = (1-\Phi(x))\dfrac{\Phi(x)}{\varphi(x)} = (1-\Phi(x))\theta(x)$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(-x)\,\Phi(x) = (1-\Phi(x))\,\theta(x)}$

3.b) $\forall x\in\mathbb{R}\quad f_h(x)=\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt+\theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$

- $x\mapsto\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ car $t\mapsto h'(t)\Phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x\mapsto h'(x)\,\Phi(x)$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt=-\int_{+\infty}^{x} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$

donc $x\mapsto\int_{-\infty}^{x} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ (même raison) et sa dérivée est $x\mapsto -h'(x)(1-\Phi(x))$

Dès lors, par somme et produit de fct° de classe C^1 f_h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_h'(x)=-\theta'(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt+\theta(-x)h'(x)\,\Phi(x)$$
$$+\theta'(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt+\theta(x)h'(x)(1-\Phi(x))$$

or $\theta(-x)\,h'(x)\,\Phi(x)=h'(x)\,\theta(-x)\,\Phi(x)$
$=h'(x)\,\theta(x)(1-\phi(x))$ selon 3.a)

donc $f_h'(x)=-\theta'(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt+\theta'(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$

selon 3.a) $\theta'(x)=1+x\,\theta(x)$
donc $\theta'(-x)=1-x\,\theta(-x)$

Il vient $f_h'(x)=-(1-x\,\theta(-x))\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt+(1+x\,\theta(x))\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$

$$=\underbrace{-\int_{-\infty}^{x} h'(t)\,\Phi(t)\,dt+\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt}_{=c_h-h(x)\text{ selon } 2.c)}$$
$$+\underbrace{x\,\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt+x\,\theta(x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt}_{=x f_h(x)}$$

cq $\left[\begin{array}{l} f_h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \text{et } \forall x\in\mathbb{R}\ \ f_h'(x)=x f_h(x)+c_h-h(x)\end{array}\right]$

f_h et h sont C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par somme et produit f_h' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut donc affirmer que $\left[f_h \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.\right]$

3.c) Selon le thm de transfert

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) f_X(t)\,dt \quad \text{où } f_X \text{ est une densité de } X$$

et $E(h(N)) = \varphi_h$

on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$ donc $E(h(N)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_h f_X(t)\,dt$

Il vient
$$E(h(X)) - E(h(N)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_h f_X(t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)(h(t) - \varphi_h)\,dt \quad \text{linéarité}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} - f_X(t)\,(f_h'(t) - t f_h(t))\,dt$$
$$= -E(f_h'(X) - X f_h(X)) \quad \text{thme de transfert}$$

cl $\boxed{|E(h(X)) - E(h(N))| = |E(f_h'(X) - X f_h(X))|}$

4.a) Pour tt réel x, selon (R_1)

$$\theta(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt$$
$$= \theta(-x)\left[x\Phi(x) + \varphi(x)\right] + \theta(x)\left[-x(1-\Phi(x)) + \varphi(x)\right]$$
$$= x\theta(-x)\Phi(x) + \theta(-x)\varphi(x) - x\theta(x)(1-\Phi(x)) + \theta(x)\varphi(x)$$
$$= \theta(-x)\varphi(x) + \theta(x)\varphi(x) \quad \text{car } \theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x)) \ (3.a))$$
$$= \frac{\Phi(-x)}{\varphi(-x)}\cdot\varphi(x) + \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}\varphi(x)$$
$$= \Phi(-x) + \Phi(x) \quad \text{car } \varphi \text{ est paire}$$
$$= 1 \quad \text{car } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(-x)\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty}(1 - \Phi(t))\,dt = 1}$

4.b) Soit $x \in \mathbb{R}$
$$|f_h(x)| = \left|\theta(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt + \theta(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt\right|$$

inégalité triangulaire

$$\leq |\theta(-x)|\left|\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt\right| + |\theta(x)|\left|\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt\right|$$
$$\leq |\theta(-x)|\int_{-\infty}^{x} |h'(t)\Phi(t)|\,dt + |\theta(x)|\int_{x}^{+\infty} |h'(t)(1-\Phi(t))|\,dt$$

• θ est à valeurs positive donc $|\theta(-x)| = \theta(-x)$ et $|\theta(x)| = \theta(x)$

• $\forall t \in \mathbb{R}$ $|h'(t)| < 1$ et Φ et $1-\Phi$ sont à valeurs positives

donc $|h'(t)\Phi(t)| = |h'(t)|\Phi(t) \leq \Phi(t)$

et $|h'(t)(1-\Phi(t))| = |h'(t)|(1-\Phi(t)) \leq 1-\Phi(t)$

En intégrant termes à termes il vient :

$$|f_e(x)| \leq \theta(-x)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)\,dt + \theta(x)\int_x^{+\infty}(1-\Phi(t))\,dt = 1 \quad \text{(selon 4.a)}$$

$$\text{cq} \left[\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_e(x)| \leq 1\right]$$

5. a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)$

donc $\theta''(-x) = -x + (1+x^2)\theta(-x)$

Dès lors $\theta''(-x)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)\,dt + \theta''(x)\int_x^{+\infty}(1-\Phi(t))\,dt$

$= (-x+(1+x^2)\theta(-x))(x\,\Phi(x)+\varphi(x)) + (x+(1+x^2)\theta(x))(-x(1-\Phi(x))+\varphi(x))$

$= -x^2\Phi(x) - \cancel{x\varphi(x)} + \cancel{x(1+x^2)\theta(-x)\Phi(x)} + (1+x^2)\theta(-x)\varphi(x)$

$\theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x))$ $\quad - x^2(1-\Phi(x)) + \cancel{x\varphi(x)} - \cancel{x(1+x^2)\theta(x)(1-\Phi(x))} + (1+x^2)\theta(x)\varphi(x)$

$= -\cancel{x^2\Phi(x)} - x^2 + \cancel{x^2\Phi(x)} + (1+x^2)\underbrace{\varphi(x)(\theta(x)+\theta(-x))}_{=1 \text{ (calcul de 4.a)}}$

$= -x^2 + 1 + x^2 = 1$

$$\text{cq} \left[\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x}\Phi(t)\,dt + \theta''(x)\int_x^{+\infty}(1-\Phi(t))\,dt = 1\right]$$

5. b) En reprenant le calcul de 3.b)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_e'(x) = -\theta'(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt + \theta'(x)\int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$$

et la dérivée de $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt$ est $x \mapsto h'(x)\Phi(x)$

et celle de $x \mapsto \int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$ est $x \mapsto -h'(x)(1-\Phi(x))$

il vient $f_e''(x) = \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt - \theta'(-x)h'(x)\Phi(x) + \theta''(x)\int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt$
$- \theta'(x)h'(x)(1-\Phi(x))$

Enfin $\theta'(x) = 1 + x\theta(x)$ et $\theta'(-x) = 1 - x\theta(-x)$

donc $-\theta'(-x)h'(x)\Phi(x) - \theta'(x)h'(x)(1-\Phi(x))$

$= -(1-x\theta(-x))h'(x)\Phi(x) - (1+x\theta(x))h'(x)(1-\Phi(x))$

Alors $-\theta'(-x)h'(x)\Phi(x) - \theta'(x)h'(x)(1-\Phi(x))$

$$= -h'(x)\Phi(x) - h'(x)(1-\Phi(x)) \quad \text{car } \theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x))$$

$$= -h'(x)$$

Ce $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad \delta''_h(x) = -h'(x) + \theta''(-x)\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\,dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\,dt\right]$

5.c) Posons $l(x) = \Phi(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi(x)$ pour tt $x \in \mathbb{R}$

l est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et produit de fct° dérivables

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad l'(x) = \Phi'(x) + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\varphi(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi'(x)$

$$= \varphi(x) + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\varphi(x) - \frac{x^2}{1+x^2}\varphi(x) \quad \text{car } \varphi'(x) = -x\varphi(x)$$

$$= \varphi(x)\left[1 + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\right]$$

$$= \varphi(x)\left[\frac{(1+x^2)^2 + 1 - x^2 - (1+x^2)x^2}{(1+x^2)^2}\right]$$

$$= \varphi(x)\left[\frac{1+2x^2+x^4+1-x^2-x^2-x^4}{(1+x^2)^2}\right]$$

$$= \varphi(x)\frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$$

Ce $\left[x \mapsto \Phi(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ $\quad$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\Phi(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi(x)\right) = 0$ et comme cette fct° est croissante sur $\mathbb{R}$

on a $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi(x) > 0\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)$

$$= x + (1+x^2)\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}$$

$$= (1+x^2)\left[\frac{x}{1+x^2} + \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}\right]$$

$$= \frac{1+x^2}{\varphi(x)}\left(\frac{x}{1+x^2}\varphi(x) + \Phi(x)\right)$$

$\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta''(x) > 0\right]$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_\ell''(x)| = \left| \ell'(x) + \theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} \ell'(t)\Phi(t)\,dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} \ell'(t)(1-\Phi(t))\,dt \right|$$

$$\leq |\ell'(x)| + |\theta''(-x)| \left| \int_{-\infty}^{x} \ell'(t)\Phi(t)\,dt \right| + \theta''(x) \left| \int_{x}^{+\infty} \ell'(t)(1-\Phi(t))\,dt \right|$$

or comme dans 4.a) $\left| \int_{-\infty}^{x} \ell'(t)\Phi(t)\,dt \right| \leq \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt$

et $\left| \int_{x}^{+\infty} \ell'(t)(1-\Phi(t))\,dt \right| \leq \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt$

et comme θ'' est positive sur $\mathbb{R}$ $|\theta''(-x)| = \theta''(-x)$ et $|\theta''(x)| = \theta''(x)$

Il vient $|f_\ell''(x)| \leq |\ell'(x)| + \underbrace{\theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\,dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt}_{=1}$

donc $|f_\ell''(x)| \leq 1+1 = 2$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $|\ell'(x)| \leq 1$

cl $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_\ell''(x)| \leq 2}$

BILAN

Cette première partie était difficile.

Certaines questions (3b), 3c), 4.b), 5.b) et 5.c)) étaient particulièrement techniques et n'auront sans doute été traitées que par très peu de candidats

PARTIE II

6. Posons $Y = h_x(X)$.

On a $Y(\Omega) = \{0,1\}$

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(h_x(X)=0) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$

et $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(h_x(X)=1) = \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$

cl [$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p = F_X(x)$ on a donc $\mathbb{E}(Y) = F_X(x)$]

7.a)
```
def gamma(t):
    if t<0:
        return 1
    elif t<=1:
        return 1-3*t**2 +2*t**3
    else:
        return 0
```

7.b)
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-1,2,100)
plt.plot(x,gamma(x))
plt.show()
```

7.c) • γ est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ constante et sur $]0,1[$ car polynôme

Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

• En particulier γ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

• en 0

$\lim_{t \to 0^-} \gamma(t) = 1$

$\lim_{t \to 0^+} \gamma(t) = \lim_{t \to 0^+} 1 - 3t^2 + 2t^3 = 1$

$\gamma(0) = 0$

• en 1 $\lim_{t \to 1^+} \gamma(t) = 0$

$\lim_{t \to 1^-} \gamma(t) = \lim_{t \to 1^-} 1 - 3t^2 + 2t^3 = 1 - 3 + 2 = 0$

$\gamma(1) = 1$

donc γ est continue en 0 et 1.

cl [γ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$]

8.b) $\forall t \in]0,1[,\quad \gamma'(t) = -6t + 6t^2 = 6t(t-1) < 0$

on a donc :

t	0		1
γ	1	$\searrow$	0

Dès lors $\forall t \in [0,1]\quad \gamma(t) \in [0,1]$

cl comme $\gamma(t) = 1$ sur $]-\infty, 0[$ et $\gamma(t) = 0$ sur $]1,+\infty[$ on a $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\quad \gamma(t) \in [0,1]}$

8.c) Soit $t \in]0,+\infty[\setminus \{1\}$ on a :

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1} = \frac{\gamma(t)}{t-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } t>1 \\ \dfrac{1-3t^2+2t^3}{t-1} & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{t \to 1^+} \frac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1} = 0$

- On remarque que $t \mapsto 1-3t^2+2t^3$ s'annule en 1. On peut donc factoriser par $t-1$. On trouve $1-3t^2+2t^3 = (t-1)(2t^2-t-1)$ pour tout $t \in]0,1[$

  Dès lors $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} \frac{\gamma(t)-\gamma(1)}{t-1} = \lim_{t \to 1^-} 2t^2-t-1 = 0$

cl $\boxed{\text{De deux points } \gamma \text{ est dérivable en } 1 \text{ et } \gamma'(1) = 0}$

8.d) • γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et $\gamma'(t) = \begin{cases} 6t(t-1) & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{si } t<0 \text{ ou } t>1 \end{cases}$

- $\displaystyle\lim_{t \to 0^-} \gamma'(t) = 0$; $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \gamma'(t) = \lim_{t \to 0^+} 6t(t-1) = 0$

  et selon 8.c) $\gamma'(0) = 0$

Dès lors $\displaystyle\lim_{t \to 0} \gamma'(t) = \gamma'(0)$ donc γ' est continue en 0

- On montre de même que γ' est continue en 1

cl $\boxed{\gamma \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

- Si $t \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ $\gamma'(t) = 0$ donc $|\gamma'(t)| \leq \frac{3}{2}$
- si $t \in]0,1[$ $\gamma'(t) = 6t(1-t)$

  γ' est dérivable car polynôme et $\forall t \in]0,1[\quad \gamma''(t) = 6 - 12t = 6(1-2t)$

  on a donc :

t	0		$1/2$		1
$\gamma''(t)$		$+$	0	$-$	
γ'	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

donc $\forall t \in]0,1[\quad |\gamma'(t)| \leq \frac{3}{2}$

cl $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}\quad |\gamma'(t)| \leq \frac{3}{2}}$

9. a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\quad h_x(y)=\begin{cases}1 & \text{si } y\leq x\\ 0 & \text{si } y>x\end{cases}$

et $k_x(y)=\gamma\left(\frac{y-x}{t}\right)=\begin{cases}1 & \text{si } \frac{y-x}{t}<0 \text{ ie } y<x \text{ (car } t>0)\\ 0 & \text{si } \frac{y-x}{t}>1 \text{ si } y>t+x\\ \gamma\left(\frac{y-x}{t}\right) & \text{si } \frac{y-x}{t}\in[0,1] \text{ ie } y\in[x,x+t]\end{cases}$

selon 8.b) $\gamma\left(\frac{y-x}{t}\right)\geq 0$

donc $k_x(y)\geqslant\begin{cases}1 & \text{si } y<x\\ 0 & \text{si } y\geqslant x\end{cases}$

ccl $\left[\text{on a } \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x\neq y \quad h_x(y)\leq k_x(y)\right]$

la relation est vraie pour $x=y$ car $h_x(x)=1$ et $k_x(x)=\gamma(0)=1$

9.b) Selon 9.a) $h_x(X)\leqslant k_x(X)$

donc par pté de l'espérance $E(h_x(X))\leqslant E(k_x(X))$

donc $E(h_x(X))-E(h_x(N))\leq E(k_x(X))-E(h_x(N))$

$= E(k_x(X))-E(k_x(N))+E(k_x(N))-E(h_x(N))$

cl $\left[E(h_x(X))-E(h_x(N))\leq E(k_x(X))-E(k_x(N))+E(k_x(N))-E(h_x(N))\right]$

9.c) $E(k_x(N))-E(h_x(N))=\int_{-\infty}^{+\infty}k_x(u)\varphi(u)\,du-\int_{-\infty}^{+\infty}h_x(u)\varphi(u)\,du$ (thme de transfert) j'utilise la variable u car t est déjà utilisée

• or $h_x(u)=\begin{cases}1 & \text{si } u\leq x\\ 0 & \text{si } u>x\end{cases}$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty}h_x(u)\varphi(u)\,du=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)\,du$

• d'autre part $k_x(u)=\gamma\left(\frac{u-x}{t}\right)=\begin{cases}1 & \text{si } u<x\\ 0 & \text{si } u>x+t\\ k_x(u) & \text{si } u\in[x,x+t]\end{cases}$ (cf. 9.a))

donc $\int_{-\infty}^{+\infty}k_x(u)\varphi(u)\,du=\int_{-\infty}^{x}1\varphi(u)\,du+\int_{x}^{x+t}k_x(u)\varphi(u)\,du+\int_{x+t}^{+\infty}0\,du$

$=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)\,du+\int_{x}^{x+t}k_x(u)\varphi(u)\,du$

cl des deux points on a $\left[E(h_x(N))-E(k_x(N))=\int_{x}^{x+t}k_x(u)\varphi(u)\,du\right]$

9.d) $\forall u\in\mathbb{R}$ $g(u)=\frac{2t}{3}k_x(u)=\frac{2t}{3}\gamma\left(\frac{u-x}{t}\right)$

γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (selon 8.d))

donc [g est de classe C^1] sur $\mathbb{R}$ par produit de fct° de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall u \in \mathbb{R} \quad g'(u) = \frac{2t}{3} \times \frac{1}{t} \gamma'\left(\frac{u-x}{t}\right) = \frac{2}{3}\gamma'\left(\frac{u-x}{t}\right)$

or selon 8.d) $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\gamma'(t)| \leq \frac{3}{2}$ donc $\boxed{\forall u \in \mathbb{R} \quad |g'(u)| \leq \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1}$

cq $\boxed{g \in W}$

$g \in W$ donc selon l'énoncé $\left|E(g(X)) - E(g(N))\right| \leq M_X$

i.e $\left|\mathbb{E}\left(\frac{2t}{3}k_x(X)\right) - \mathbb{E}\left(\frac{2t}{3}k_x(N)\right)\right| \leq M_X$ linéarité et $t>0$

puis $\frac{2t}{3}\left|E(k_x(X)) - E(k_x(N))\right| \leq M_X$

Il vient $\left|E(k_x(X)) - E(k_x(N))\right| \leq \frac{3}{2t}M_X$. donc $\boxed{E(k_x(X)) - E(k_x(N)) \leq \frac{3}{2t}M_X}$

D'autre part $E(k_x(N)) - E(h_x(N)) = \int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)\,du$ (selon 9.c))

$= \int_x^{x+t} \gamma\left(\frac{u-x}{t}\right)\varphi(u)\,du$ déf. de k_x

$\leq \int_x^{x+t} \varphi(u)\,du$ car $\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma(t) \in [0,1]$ et $\forall u \in \mathbb{R} \quad \varphi(u) > 0$

$\leq \int_x^{x+t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du$

$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{x+t} 1\,du$ car sur $[0,+\infty[$ $e^{-t^2/2} \leq 1$ et $u>0$ et $t>1$

$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times (t+x-x)$

on a donc $\boxed{E(k_x(N)) - E(h_x(N)) \leq \frac{t}{\sqrt{2\pi}}}$

Enfin, selon 9.b) $E(h_x(X)) - E(h_x(N)) \leq \underbrace{E(k_x(X)) - E(k_x(N))}_{\leq \frac{3}{2t}M_X} + \underbrace{E(k_x(N)) - E(h_x(N))}_{\leq t/\sqrt{2\pi}}$

cq $\boxed{E(h_x(X)) - E(h_x(N)) \leq \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}}$ (car $\pi > 2$ donc $2\pi > 4$ et $\sqrt{2\pi} > 2$

10. On admet que $E(h_x(N)) - E(h_x(X)) \leq \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}$

on a donc $\left|E(h_x(X)) - E(h_x(N))\right| \leq \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}$

Posons $j(t) = \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}$ pour $t \in]0,+\infty[$

j est clairement dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall t>0 \quad j'(t) = \frac{-3}{2t^2}M_X + \frac{1}{2}$$

Dès lors $j'(t) > 0 \iff \frac{3}{2t^2}M_X < \frac{1}{2}$

$\iff t^2 > 3M_X$

$\iff t > \sqrt{3M_X}$

On a donc :

t	0		$\sqrt{3M_X}$		$+\infty$
$j'(t)$		$-$	0	$+$	
j		$\searrow$		$\nearrow$	

Le minimum de j sur $]0,+\infty[$ est $j(\sqrt{3M_X}) = \dfrac{3M_X}{2\sqrt{3M_X}} + \dfrac{\sqrt{3M_X}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3M_X}}{2} + \frac{\sqrt{3M_X}}{2} = \sqrt{3M_X}$$

cl $\left[\,\left|E(h_n(X)) - E(h_x(N))\right| \leqslant \sqrt{3M_X}\,\right]$

Enfin par définition $d_X(x) = |F_X(x) - \Phi(x)|$

$= |F_X(x) - F_N(x)|$ car $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$= |E(h_x(X)) - E(h_x(N))|$ (selon 6.)

cl $\left[\,d_X(x) \leqslant \sqrt{3M_X}\,\right]$

BILAN

Cette partie était plus accessible. Les questions 6 à 8 ne posaient pas de difficulté.

Les questions 9 et 10 étaient plus délicates mais il y avait des points à gratter en étant un peu stratégique.

11.a) Rmq Extrait du programme officiel :

"Pour les fonctions suivantes toute utilisation doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces élts"

Les fct des bibliothèques matplotlib et pandas en font partie !

```
C= pd.read-csv("stats.csv")
echantillon = C["salaire"]
```

11.b)

```
if echantillon[i] <= a+h and echantillon[i] > a-h :
        C += 1        # identique a C=C+1
print(C/(2*h*n))
```

12. C_n est le nbre de succès de l'evt $X_i \in]a-h_n ; a+h_n]$ de probabilité $F(a+h_n)-F(a-h_n)$ lors de n tentatives identiques et indépendantes.

cc $\boxed{C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n) \text{ avec } p_n = F(a+h_n)-F(a-h_n)}$

On a donc $E(C_n) = n p_n$ et $E(f_n) = E\left(\frac{C_n}{2nh_n}\right) = \frac{1}{2nh_n} E(C_n)$ (linéarité)

$= \frac{1}{2nh_n} \cdot n p_n$

cc $\boxed{E(f_n) = \frac{p_n}{2h_n} = \frac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n}}$

13.a) f est continue en a donc par régularité des fct de répartition F est dérivable en a.

de plus $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = F'(a) = f(a)$ de même $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(a-h)-F(a)}{-h} = f(a)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F(a+h_n)-F(a)}{h_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F(a-h_n)-F(a)}{-h_n} = f(a)$

Enfin $\frac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n} = \frac{F(a+h_n)-F(a)}{2h_n} + \frac{F(a-h_n)-F(a)}{-2h_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(a)}{2} + \frac{f(a)}{2}$

cc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} E(f_n) = f(a)}$

13.b) $C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$ donc $V(C_n) = n p_n (1-p_n)$

Dès lors $V(f_n) = V\left(\frac{C_n}{2nh_n}\right) = \frac{1}{4n^2h_n^2} \times n p_n (1-p_n)$

$= \frac{1}{2nh_n} \times \frac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n} \times (1-p_n)$

On a $\frac{1}{2n h_n} \to 0$; $\frac{F(a+h_n)-F(a-h_n)}{2h_n} \to f(a)$ (13.a)) et $1-p_n \in [0,1]$

cl par produit de limite $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V(\hat{f}_n)=0}$

14.a) F est de classe C^2 au voisinage de a donc selon Taylor-Young

$$F(a+h) \underset{h\to 0}{=} F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + o(h^2)$$

de même $F(a-h) \underset{h\to 0}{=} F(a) - hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + o(h^2)$

Il vient $F(a+h) - F(a-h) \underset{h\to 0}{=} 2hF'(a) + o(h^2) = 2hf(a) + o(h^2)$

cl $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$ donc $\left[p_n = F(a+h_n) - F(a-h_n) \underset{n\to+\infty}{=} 2h_n f(a) + o(h_n^2) = \theta_n^2 + o(h_n^2) \right]$

14.b) On a donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2h_n f(a)$ donc $np_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2nh_n f(a)$

selon l'énoncé $\lim\limits_{n\to+\infty} nh_n = +\infty$ et $f(a)>0$ donc $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = +\infty \right)$

14.c) • $\frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = \frac{\cancel{\sigma_n}}{\theta_n\sqrt{n}} \cdot \frac{C_n - np_n}{\cancel{\sigma_n}} + \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right)$

$$= \frac{C_n - np_n}{\theta_n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}\,p_n}{\theta_n} - \sqrt{n}\,\theta_n$$

$$= \frac{C_n}{\theta_n\sqrt{n}} - \cancel{\frac{np_n}{\theta_n\sqrt{n}}} + \cancel{\frac{\sqrt{n}\,p_n}{\theta_n}} - \sqrt{n}\,\theta_n = \frac{C_n}{\theta_n\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,\theta_n$$

• d'autre part

$$\hat{f}_n = \frac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}(f_n - f(a)) = \frac{\theta_n\sqrt{n}\,f_n}{f(a)} - \theta_n\sqrt{n}$$

$$= \frac{\theta_n\sqrt{n}\,C_n}{2nh_n f(a)} - \theta_n\sqrt{n} \quad \text{car } f_n = \frac{C_n}{2nh_n}$$

$$= \frac{\theta_n\sqrt{n}\,C_n}{n\,\theta_n^2} - \theta_n\sqrt{n} \quad \text{car } \theta_n = \sqrt{2h_n f(a)}$$

$$= \frac{C_n}{\theta_n\sqrt{n}} - \theta_n\sqrt{n}$$

cl $\left[\hat{f}_n = \frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) \right]$

• $\frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{np_n(1-p_n)}}{\sqrt{2h_n f(a)}\cdot\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{2h_n f(a)}} \sim \sqrt{1-p_n}$ car $p_n \sim 2h_n f(a)$

enfin $p_n \sim 2h_n f(a) \to 0$ donc $\sqrt{1-p_n} \to 1$

cl $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} = 1 \right]$

- $\dfrac{P_n}{\theta_n} - \theta_n = \dfrac{P_n - \theta_n^2}{\theta_n} = \dfrac{\theta_n^2 + o(h_n^2) - \theta_n^2}{\theta_n}$ (selon 14.a))

$$= \frac{o(h_n^2)}{\sqrt{2h_n f(a)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2f(a)}} \cdot o(h_n^{3/2})$$

donc $\sqrt{n}\left(\dfrac{P_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2f(a)}} \cdot \sqrt{n}\, o(h_n^{3/2})$

Enfin $\lim n^2 h_n^3 = 0$ donc $\lim \sqrt{n}\, h_n^{3/2} = 0$ (composée par $x \mapsto \sqrt{x}$)

cl $\left[\lim \sqrt{n}\left(\dfrac{P_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = 0\right]$

15. a) Dire que t_α est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de $\mathcal{N}(0,1)$ c'est dire que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

$P\left((f(a))^2 - 2\left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2 \leq 0\right)$

$= P\left((f(a))^2 - 2f_n + f_n^2 \leq \dfrac{2\eta_\alpha}{2nh_n} f(a)\right)$

$= P\left((f(a) - f_n)^2 \leq \dfrac{2\eta_\alpha}{2nh_n} f(a)\right)$

$= P\left(|f(a) - f_n| \leq \sqrt{\dfrac{2\eta_\alpha f(a)}{2nh_n}}\right)$

$= P\left(|f(a) - f_n| \leq \sqrt{t_\alpha^2 \dfrac{f(a)}{2nh_n}}\right)$

$= P\left(|f(a) - f_n| \leq t_\alpha \sqrt{\dfrac{f(a)}{2nh_n}}\right)$

$= P\left(|f(a) - f_n| \times \sqrt{\dfrac{2nh_n}{f(a)}} \leq t_\alpha\right)$

$= P\left(|f(a) - f_n| \times \dfrac{\sqrt{2nh_n f(a)}}{f(a)} \leq t_\alpha\right)$

$= P(|\hat{f}_n| \leq t_\alpha)$ ↲ définition de $\hat{f}_n$

$= P(-t_\alpha \leq \hat{f}_n \leq t_\alpha)$

$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$

cl $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} P\left((f(a))^2 - 2\left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2 \leq 0\right) = 1 - \alpha\right]$

15. b) $f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} - \Delta_n \; ; \; f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} + \Delta_n \right]$

$$\iff f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} - \Delta_n \leq f(a) \leq f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} + \Delta_n$$

$$\iff -\Delta_n \leq f(a) - f_n - \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} \leq \Delta_n$$

$$\iff \left(f(a) - f_n - \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} \right)^2 \leq \Delta_n^2$$

$$\iff \left(f(a) - f_n - \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} \right)^2 \leq \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} \right)^2 - f_n^2$$

$$\iff (f(a))^2 - 2 f(a) \left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} \right) + \cancel{\left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} \right)^2} \leq \cancel{\left(f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} \right)^2} - f_n^2$$

$$\iff (f(a))^2 - f(a) \left(2 f_n + \frac{\eta_\alpha}{2n f_n} \right) + f_n^2 \leq 0$$

Or Selon 14. a) $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} - \Delta_n \; ; \; f_n + \frac{\eta_\alpha}{4n f_n} + \Delta_n \right] \right) = 1 - \alpha}$

BILAN

Les questions 12, 13, 14 a), 14.b) étaient plutôt faciles.

Le reste était plus technique et pouvait se révéler très chronophage.

La question d'info aurait été très facile si on nous avait rappelé la syntaxe.

16.a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(S_n)-f'(Y_k)) = \sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(Y_k))$ (linéarité)

$$= E(f'(S_n)) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k}_{=1} - \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) E(f'(Y_k))$$

$$= E(f'(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) E(f'(Y_k))$$

or $Y_k = S_n - X_k$

$$= X_1 + \dots + X_n - X_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} X_i$$

donc selon le lemme de coalition Y_k est indépendant de X_k

puis $f'(Y_k)$ est indépendants de $E(X_k^2)$

Il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(S_n) - f'(Y_k)) = E(f'(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 f'(Y_k))$

cl $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 f'(Y_k)) = E(f'(S_n)) \right]$

16.b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k (f(S_n) - f(Y_k))) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k f(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} E(X_k f(Y_k))$ (linéarité)

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k f(S_n)) - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{E(X_k)}_{=0} E(f(Y_k))$$ (X_k et $f(Y_k)$ sont ind selon le lemme de coalition)

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k f(S_n))$$

les V.A X_k sont supposés centrées

$$= E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k f(S_n)\right)$$ } linéarité

$$= E(S_n f(S_n))$$

cl $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k (f(S_n) - f(Y_k))) = E(S_n f(S_n)) \right]$

16.c) En soustrayant membre à membre les égalités obtenues en a) et en b)

$E(f'(S_n) - S_n f(S_n)) = E(f'(S_n)) - E(S_n f(S_n))$ (linéarité)

$$= \sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2 f'(Y_k)) - \sum_{k=1}^{n} E(X_k (f(S_n) - f(Y_k)))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} v_k E(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} E(X_k (X_k f'(Y_k) - f(S_n) - f(Y_k)))$$

ce qu'il fallait démontrer

17.a) $\int_0^1 b(f'(a)-f'(a+tb))\,dt = bf'(a)\int_0^1 1\,dt - \int_0^1 bf'(a+tb)\,dt$

$$= bf'(a) - [f(a+tb)]_0^1$$

cl $\boxed{\int_0^1 b(f'(a)-f'(a+tb))\,dt = bf'(a) - (f(a+b) - f(a))}$

17.b) Selon l'énoncé f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f''(x)|\leq 2$

Selon l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |f'(x)-f'(y)| \leq 2\,|x-y|$$

on prend $x=a$ et $y=a+tb$ avec $t\in[0,1]$

il vient $|f'(a)-f'(a+tb)| \leq 2|a+tb-a| = 2t|b|$ $(*)$

De plus (inégalité triangulaire)

$$|bf'(a)-(f(a+b)-f(a))| = \left|\int_0^1 b(f'(a)-f'(a+tb))\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 |b|\,|f'(a)-f'(a+tb)|\,dt$$

$$\leq \int_0^1 2t|b|^2\,dt \quad \text{selon } (*)$$

Enfin $\int_0^1 2t|b|^2dt = |b|^2\int_0^1 2t\,dt = |b|^2[t^2]_0^1 = |b|^2$

cl $\boxed{|bf'(a)-(f(a+b)-f(a))| \leq |b|^2}$

17.c) Si je pose $b=X_k$ et $a=Y_k$

$$|X_k f'(Y_k) - (f(\underbrace{Y_k+X_k}_{=S_n}) - f(Y_k))| \leq X_k^2$$

donc $|X_k f'(Y_k) - f(S_n) - f(Y_k)| \leq X_k^2$ $\quad) \times |X_k| \geq 0$

puis $|X_k(X_k f'(Y_k) - f(S_n) - f(Y_k)| \leq |X_k|^3$

⚠ On admet que si X est une VA on a $|E(X)|\leq E(|X|)$

On a alors

$$|E(f'(S_n) - Sf_n(S_n)| = \left|\sum_{k=1}^n v_k E(f'(S_n)-f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^n E(X_k(X_k f'(X_k)-f(S_n)-f(Y_k))\right|$$

inégalité triangulaire et $v_k\geq 0$

$$\leq \sum_{k=1}^n v_k E(|f'(S_n)-f'(Y_k)| + \sum_{k=1}^n E(\underbrace{|X_k(X_k(f'(X_k)-f(S_n)-f(Y_k)|}_{\leq E(|X_k|^3)})$$

$$\leq \sum_{k=1}^n v_k E(|f'(S_n)-f'(Y_k)|) + \sum_{k=1}^n E(|X_k|^3)$$

Enfin, en appliquant à nouveau l'IAF avec $x = S_n$ et $y = Y_k$

on a $|f'(S_n) - f'(Y_k)| \leq 2|S_n - Y_k| = 2|X_k|$

d'où $\left[|E(f'(S_n) - S_n f(S_n)| \leq 2\sum_{k=1}^{n} v_k E(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|^3) \right]$ (*)

Selon 3.c) Si X admet une espérance et si $h \in W$ alors
$$|E(h(X)) - E(h(N))| = |E(f_h'(X) - X f_h(X)|$$
où f_h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (3.b)) tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f_h(x)| \leq 1$ (4.b))
et $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f_h''(x)| \leq 2$ (5.a))

Alors les hypothèses de l'énoncé sont réunies et selon (*)
$$|E(h(S_n)) - E(h(N))| = |E(f_h'(S_n)) - S_n f_h(S_n)| \leq 2\sum_{k=1}^{n} v_k E(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|^3)$$
Le réel $M_{S_n} = 2\sum_{k=1}^{n} E(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|^3)$ est alors tq
$$\forall h \in W \quad |E(h(S_n)) - E(h(N))| \leq M_{S_n}$$
d'où selon l'inégalité (R_2) du 10 on a $d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3M_{S_n}}$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$

ie $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3\left(2\sum_{k=1}^{n} v_k E(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|^3)\right)} \right]$

18. a) • Les variables aléatoires X_k sont clairement centrées, indépendantes (lemme de coalition), admettent des moments d'ordre 3.

Donc selon 17.c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3\left(2\sum_{k=1}^{n} v_k E(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|^3)\right)}$

- $E(|X_k|) = E\left(\left|\frac{Z_k - E(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}\right|\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} E(|Z_k - E(Z_k)|) = \frac{S_1}{\sigma\sqrt{n}}$
- $E(|X_k|^3) = \frac{S_3}{\sigma^3 n^{3/2}}$ (même démarche)
- $v_k = E(|X_k|^2) = \frac{S_2}{\sigma^2 n} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 n} = \frac{1}{n}$

Il vient $2\sum_{k=1}^{n} v_k E(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|^3) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{S_1}{\sigma\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{S_3}{\sigma^3 n^{3/2}}$
$$= 2n \frac{1}{n}\frac{S_1}{\sigma\sqrt{n}} + n\frac{S_3}{\sigma n^{3/2}}$$
$$= \frac{2\sigma^2 S_1}{\sigma^3\sqrt{n}} + \frac{S_3}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

d'où $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad d_{S_n}(x) \leq \sqrt{3\,\frac{2\sigma^2 S_1 + S_3}{\sigma^3\sqrt{n}}} \right]$

18. b) Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\delta_n = \sqrt{3\,\frac{2\sigma^2 S_1 + S_3}{\sigma^3\sqrt{n}}}$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $d_{S_n}(x) \leq \delta_n$

et $\lim_{n \to +\infty} \delta_n = 0$ donc $\left[(S_n) \text{ converge uniformément en loi vers } N \right]$

On aurait pu utiliser le TLC : (S_n) est une suite de VA admettant une espérance et une variance donc $(S_n^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} N$

avec $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = S_n$

car $E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$ (les X_k sont centrées)

$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \underbrace{n V(X_1)}_{=1}$ (les X_k suivent la même loi)

car $V(X_1) = V\left(\dfrac{X_1 - E(X_1)}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \dfrac{V(X_1 - E(X_1))}{n\sigma^2} = \dfrac{1}{n}$

19. a) $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$ donc $P(Z_k = 0) = 1 - p_n$ et $P(Z_k = 1) = p_n$

on a donc $X_k(\Omega) = \left\{\dfrac{1-p_n}{\sigma_n} ; \dfrac{-p_n}{\sigma_n}\right\}$

avec $P\left(X_k = \dfrac{1-p_n}{\sigma_n}\right) = p_n$ et $P\left(X_k = \dfrac{-p_n}{\sigma_n}\right) = 1 - p_n$

donc $E(|X_k|) = \left|\dfrac{1-p_n}{\sigma_n}\right| p_n + \left|\dfrac{-p_n}{\sigma_n}\right| (1-p_n)$ (th. de transfert)

$= \dfrac{(1-p_n)p_n}{\sigma_n} + \dfrac{p_n(1-p_n)}{\sigma_n}$

or $\sigma_n = \sqrt{n p_n(1-p_n)}$ donc $p_n(1-p_n) = \dfrac{\sigma_n^2}{n}$

cl $\boxed{E(|X_k|) = \dfrac{2\sigma_n}{n}}$

de même $E(|X_k|^3) = \left|\dfrac{1-p_n}{\sigma_n}\right|^3 p_n + \left|\dfrac{-p_n}{\sigma_n}\right|^3 (1-p_n)$

$= \dfrac{p_n(1-p_n)^3}{\sigma_n^3} + \dfrac{p_n^3(1-p_n)}{\sigma_n^3}$

$= \dfrac{p_n(1-p_n)\left((1-p_n)^2 + p_n^2\right)}{n\sigma_n^3}$

$= \dfrac{1}{2n\sigma_n}\left(1 - 2p_n + 2p_n^2\right)$

$\leq \dfrac{2}{n\sigma_n}$ car $1 - 2p_n + 2p_n^2 = 1 + 2p_n(1-p_n) \leq 4$

cl $\boxed{E(|X_k|^3) \leq \dfrac{2}{n\sigma_n}}$

19. b) on a $E(|X_k|) = \dfrac{2\sigma_n}{n}$ $E(|X_k|^2) \leq \dfrac{2}{n\sigma_n}$

et $v_k = E(X_k^2) = E\left(\left(\dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}\right)^2\right) = \dfrac{1}{\sigma_n^2} E\left((Z_k - E(Z_k))^2\right)$

$= \dfrac{1}{\sigma_n^2} V(Z_k) = \dfrac{p_n(1-p_n)}{\sigma_n^2}$ (car $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$)

On a donc $2\sum_{k=1}^{n} v_k E(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} E(|X_k|^3) \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{p_n(1-p_n)}{\sigma_n^2} \cdot \frac{2\sigma_n}{n} + \sum_{k=1}^{n} 2/n\sigma_n$

$$\leq 2n \frac{p_n(1-p_n)}{\sigma_n^2} \times \frac{2\sigma_n}{n} + n \cdot \frac{2}{n\sigma_n}$$

$$\leq 4\left(\frac{p_n(1-p_n)}{\sigma_n} + \frac{1}{2\sigma_n} \right)$$

avec $\frac{p_n(1-p_n)}{\sigma_n} = \frac{p_n(1-p_n)}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} = \frac{\sqrt{p_n(1-p_n)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{np_n(1-p_n)}}{n} = \frac{\sigma_n}{n}$

$\underline{\text{cl}}$ selon (P_3) $\left[d_{S_n}(x) \leq 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)} \text{ pour } \forall x \in \mathbb{R} \right]$

19.c) Soit $T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$. Alors il existe $Z_1, \dots, Z_n$ suivant des lois indépendantes de Bernoulli de paramètre p_n tq $T_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$

En reprenant les notations 19.a) et 19.c)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(Z_k - E(Z_k))}{\sigma_n}$$

$$= \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n} Z_k - \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^{n} p_n$$

$$= \frac{T_n - np_n}{\sigma_n} = \frac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$$

On a donc selon 19.b) $d_{S_n}(x) \leq 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)}$

On suppose que $p_n \to 0$ donc $\frac{\sigma_n}{n} = \frac{\sqrt{np_n(1-p_n)}}{n} \sim \frac{\sqrt{p_n}}{\sqrt{n}} \to 0$ car $1 - p_n \sim 1$

et $\frac{1}{2\sigma_n} \sim \frac{1}{2\sqrt{np_n}} \to 0$ car $np_n \to +\infty$

Il existe donc une suite $(\delta_n)_{n \geq 1}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $d_{S_n}(x) \leq \delta_n$ et $\lim \delta_n = 0$

$\underline{\text{cl}}$ $\left[(S_n) = \left(\frac{T_n - np_n}{\sigma_n}\right) \text{ cvge uniformément en loi vers } N \right]$

20.a) Soit $x \in \mathbb{R}$ $F_{\alpha X + \beta}(x) = P(\alpha X + \beta \leq x)$
$= P\left(X \leq \frac{x-\beta}{\alpha}\right)$ car $\alpha > 0$

de m $F_{\alpha N + \beta}(x) = P\left(N \leq \frac{x - \beta}{\alpha}\right)$

$\underline{\text{cl}}$ $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad |F_{\alpha X + \beta}(x) - F_{\alpha N + \beta}(x)| = \left|F_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) - \Phi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right| = d_X\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right) \right]$

20.b) On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, selon 20.a)

$$0 \leq \left| \mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leq x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leq x) \right| = d_{V_n}\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right)$$

or (V_n) cvge uniformément en loi vers N donc il existe $(\delta_n)_{n \geq 1}$ une suite tendant vers 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $d_{V_n}\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) \leq \delta_n$

cl selon le thme de l'encadrement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leq x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leq x) = 0}$$

19.c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(a_n N + b_n \leq x) = \mathbb{P}\left(N \leq \frac{x - b_n}{a_n}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x - b_n}{a_n} = \frac{x - b}{a}$ et Φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) = \Phi\left(\frac{x - b}{a}\right)$

Enfin $\Phi\left(\frac{x - b}{a}\right) = \mathbb{P}\left(N \leq \frac{x - b}{a}\right) = \mathbb{P}(aN + b \leq x)$

cl $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(a_n N + b_n \leq x) = \mathbb{P}(aN + b \leq x) \text{ pour tt réel } x}$.

et par définition de la convergence en loi $\boxed{a_n N + b_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aN + b}$

Par stabilité $aN + b$ suit une loi normale

- d'espérance $E(aN + b) = aE(N) + b = b$ car $E(N) = 0$
- de variance $V(aN + b) = a^2 V(N) = a^2$ car $V(N) = 1$

cl $\boxed{aN + b \hookrightarrow \mathcal{N}(b, a^2)}$

21.a) Selon 13. $D_n = \frac{C_n - np_n}{\sigma_n}$ avec $p_n \to 0$ (14.a)) et $np_n \to +\infty$ (14.b))

et $C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ (selon 12.)

cl selon 19.c) $\boxed{(D_n)_{n \geq 1} \text{ converge uniformément en loi vers } N}$

21.b) Selon 14.c) $\hat{f}_n = a_n D_n + b_n$ avec $a_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_n \sqrt{n}} \to 1$

et $b_n = \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\sigma_n} - \theta_n\right) \to 0$

et selon 21.a) $(D_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément en loi vers N

cl $\boxed{\text{selon 20.4 } (\hat{f}_n) \text{ converge en loi vers } 1N + 0 = N}$

BILAN

En dehors de la question 17.c) la plupart des questions de la partie IV était abordable. Beaucoup de question se faisaient de manière presque immédiate. Encore fallait-il gérer son temps pour arriver jusque là.

BILAN GÉNÉRAL

Comme à l'accoutumé ce sujet était extrêmement long.
Il y avait beaucoup de questions techniques qui pouvaient être très chronophages. Cependant il y avait aussi beaucoup de questions accessibles. L'organisation du temps aura donc joué un rôle important.
A mon avis un étudiant qui aura traité (correctement !) un tiers du sujet (c'est-à-dire une quinzaine de questions) aura une très bonne note.

Rmq La méthode de Stein est une méthode dont le but est de déterminer des bornes sur les distances entre deux lois. Elle était étudiée ici dans le cas particulier d'une loi normale. C'est en cherchant une nouvelle démonstration du TLC qu'il publia dans les années 1970 les bases de sa méthode.