Exercice 1

Partie I

1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
R_X(k) &= \mathbb{P}(X > k) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \leq k) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} p \quad \text{car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \\
&= 1 - p \sum_{j=0}^{k-1} (1-p)^j \quad j = i-1 \\
&= 1 - p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \quad \text{car } p \in]0,1[\text{ donc } 1-p \neq 1 \\
&= 1 - p \times \frac{1-(1-p)^k}{p} = 1 - (1-(1-p)^k) = (1-p)^k
\end{aligned}$$

si $k=0$ $R_X(0) = \mathbb{P}(X>0) = 1 = (1-p)^0$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

cl $\left[\forall k \in \mathbb{N} \ R_X(k) = (1-p)^k \right]$

1.b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad \dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1-p$

cl $\left[\forall k \in \mathbb{N}^* \ \dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1-p \right]$

2.a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad \mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$

or X est à valeurs entières donc $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(X > k-1)$

Il vient $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k)$

donc $R_X(k-1) = R_X(k) + \mathbb{P}(X = k)$

cl $\left[\forall k \in \mathbb{N}^* \ \mathbb{P}(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k) \right]$

2.b) • Si X et Y suivent la même loi alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad R_X(k) = \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k) = R_Y(k)$$

• Si pour tt $k \in \mathbb{N}$ $R_X(k) = R_Y(k)$

alors pour tt $k \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{P}(X=k) = R_X(k-1) - R_X(k)$

$$= R_Y(k-1) - R_Y(k)$$

$$= \mathbb{P}(Y=k)$$

donc X et Y suivent la même loi.

cl $\left[\text{par double implication } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi ssi pour } \forall k \in \mathbb{N} \; R_X(k) = R_Y(k)\right]$

Partie II

3.a) Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{car } (n+1)! = (n+1) \times n!$$

cl les entiers $a=b=1$ conviennent : $\left[\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right]$

Rmq on pouvait aussi, bien sûr, utiliser la méthode d'identification.

3.b) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

selon 3.a) on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \quad \downarrow i = k+1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i!} \quad \downarrow \text{télescopage}$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Dès lors $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

cl $\left[\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1\right]$

Rmq on pouvait aussi remarquer que $\frac{n}{(n+1)!}$ était une combinaison linéaire de termes généraux de séries exponentielles

4.a) Sous réserve d'existence, selon le théorème du transfert

$$E(X+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) P(X=n)$$

$$(n+1) P(X=n) = (n+1) \cdot \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n}{n!} \quad \text{car } (n+1)! = (n+1) \times n!$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{car } n! = n \times (n-1)!$$

on reconnait le terme général d'une série exponentielle de paramètre 1

Donc la série converge absolument et [$X+1$ admet une espérance].

$$E(X+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} \quad i=n-1$$

$$= e^1$$

cl [$X+1$ admet une espérance et $E(X+1) = e$]

$X = X+1-1$ donc X admet une espérance et $E(X) = E(X+1) - 1 = e-1$

cl [X admet une espérance et $E(X) = e-1$]

4.b) Sous réserve d'existence, selon le thme de transfert,

$$E((X-1)(X+1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n+1)P(X=n)$$

or $(n-1)(n+1)P(X=n) = (n-1)(n+1)\frac{n}{(n+1)!}$

$$= \frac{(n-1)}{(n-1)!} \quad \text{cf. 4a)}$$

$$= \frac{1}{(n-2)!} \quad \text{car } (n-1)! = (n-1)\times(n-2)!$$

cependant cette relation n'est vraie que pour $n \geqslant 2$.

On reconnait le terme général d'une série exponentielle qui converge absolument donc [$(X-1)(X+1)$ admet une espérance]

$$E((X-1)(X+1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n+1)\frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \quad \text{(le terme en 1 est nul)}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} = e$$

cl [$(X-1)(X+1)$ admet une espérance et $E((X-1)(X+1)) = e$]

$(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ donc $X^2 = (X-1)(X+1)+1$

Dès lors X^2 admet une espérance et $E(X^2) = E((X-1)(X+1))+1 = e+1$

Alors X admet une variance et selon Koenig-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = e+1-(e-1)^2 = e+1-e^2+2e-1$$

cl [X admet une variance et $V(X) = 3e - e^2$]

Partie III

5. $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad R_X(k) = P(X > k)$

$= P((X > k-1) \cap (X > k))$ ⤸ pour que la machine fonctionne après l'instant k il faut qu'elle fonctionne après l'instant k-1

$= P(X > k-1) P_{(X>k-1)}(X > k)$

$= P(X > k-1)(1 - \alpha_k)$ ⤸ selon l'énoncé

cl $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad R_X(k) = (1-\alpha_k) R_X(k-1)}$

6. Soit $\mathcal{P}(k)$ la pté " $R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)$ "

- Initialisation

$\mathcal{P}(1)$ est la pté $R_X(1) = \prod_{i=1}^{1} (1-\alpha_i) = 1 - \alpha_1$

c'est vrai car $R_X(1) = P(X > 1)$

$= 1 - P(X = 1)$

$= 1 - \alpha_1$ ⤸ car la machine cesse de fonctionner l'année 1 avec la probabilité α_1

- Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier fixé. Supposons $P(k)$ et montrons $P(k+1)$

$R_X(k+1) = (1 - \alpha_{k+1}) R_X(k)$ selon 5.

$= (1 - \alpha_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)$ par hypothèse de récurrence

$= \prod_{i=1}^{k+1} (1-\alpha_i)$ donc $P(k+1)$ est vraie

cl selon le principe de récurrence $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad R_X(k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)}$

7. Selon 2.a) $\forall k \geq 2, \; P(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)$

$= \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)$

$= \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_i) \times \underbrace{(1-\alpha_k)}_{\text{terme en } k}$

$= \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_i)(1 - (1-\alpha_k))$

si $k = 1$ $\quad P(X = 1) = R_X(0) - R_X(1) = 1 - (1 - \alpha_1) = \alpha_1$

cl $\boxed{\forall k \geq 2 \quad P(X = k) = \alpha_k \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (1-\alpha_i) \quad \text{et} \quad P(X = 1) = \alpha_1}$

8.a) Si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_k = p$ alors selon 7.

$$\forall k \geq 2, \quad P(X=k) = p \prod_{i=1}^{k-1} (1-p) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{et} \quad P(X=1) = \alpha_1 = p$$

$\underline{\underline{\text{Cl}}}$ [Si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_k = p$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$]

8.b) Si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$ alors selon 7.

$$\forall k \geq 2 \quad P(X=k) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1}$$

$$= \frac{k}{k+1} \prod_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \qquad \wr\ j = i+1$$

$$= \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\text{et} \quad P(X=1) = \alpha_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

$\underline{\underline{\text{Cl}}}$ [Si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$ alors X suit la loi introduite dans la partie II]

Partie IV

9.a)
```
SELECT COUNT(*)
FROM ordinateur
```

9.b)
```
SELECT COUNT(*)
FROM ordinateur
WHERE annee_panne = annee_fabrication+1
```

9.c) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1)$ alors $P(X=1) = p$

Pour estimer p il faut donc estimer la valeur de $P(X=1)$ c'est-à dire la probabilité qu'un ordinateur tombe en panne la 1ère année.

Selon la loi faible des grands nombres p peut être estimer par le quotient du résultat de 9.b) par celui de 9.a)

10.
```
UPDATE ordinateur
SET duree_vie = annee_panne - annee_fabrication
WHERE annee_panne != -1
```

11. a) La requête proposée renvoie la durée de vie moyenne.
Selon la loi des grands nombres c'est une estimation de
$E(X) = \frac{1}{p}$
[L'inverse du nombre renvoyé est donc une estimation de p.]

Rmq erreur d'énoncé la table est appelée ordinateurs au lieu de ordinateur.

/!\ erreurs d'énoncé ! Certaines valeurs de duree_vie sont égales à -1.
Il faudrait les retirer pour ne pas biaiser le résultat.

```
SELECT AVG(duree_vie) FROM ordinateur
WHERE duree_vie != -1
```

11. b) Selon 9.a) si la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante. Il est alors pertinent de représenter la durée de vie par une loi géométrique.
Il serait donc plus pertinent d'écrire

```
SELECT COUNT(*)/10000 WHERE duree-vie > k
```

pour estimer la valeur de α_k. Si les α_k sont sensiblement égaux alors il est judicieux de représenter la durée de vie par une loi géométrique

BILAN

Les deux premières parties étaient plutôt accessibles et permettaient aux étudiants sérieux de tirer leur épingle du jeu.
La partie I avait été faite en TD (Ex2 TD8) quasiment à l'identique.
La partie II était plus délicate et aura permis aux meilleurs de se mettre en valeur. On peut regretter que le résultat du 2.a) ne soit pas donné. Cela aura sans doute bloqué pas mal de candidats.
La partie IV sur SQL ne présentait pas de difficulté. Je reste dubitatif sur ce choix de mobiliser une commande (COUNT) hors programme. Même si la syntaxe était donnée cela ajoutait de la difficulté.
Enfin on peut regretter que, comme souvent à ECRICOME, l'exercice de probabilités ne porte que sur le programme de 1ère année.

Exercice 1

Partie I

1.a) On serait tenter de dire que $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-2at-t^2} = 0$ par le TCC

Mais ce n'est pas exactement une limite du TCC.

Si on veut être rigoureux il faut être astucieux :

$\forall t \in \mathbb{R}$ $t^2 e^{-2at-t^2} = t^2 \times e^{a^2-a^2-2at-t^2}$

$= t^2 e^{a^2} \times e^{-(a+t)^2}$ } id. remarquable

$= e^{a^2} \times \dfrac{t^2}{e^{(a+t)^2}}$

je pose $h = a+t$ ie $t = h-a$ lors $t\to+\infty$ $h\to+\infty$

$t^2 e^{-2at-t^2} = e^{a^2} \times \dfrac{(h-a)^2}{e^{-h}}$

$= e^{a} \times \left(\dfrac{h^2}{e^{h}} - \dfrac{2ah}{e^h} + \dfrac{a^2}{e^h}\right)$

et là, par le TCC $\lim_{h\to+\infty} \dfrac{h^2}{e^h} = 0$ et $\lim_{h\to+\infty} \dfrac{h}{e^h} = 0$

cl par somme de limites $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-2at-t^2} = 0$

[donc $e^{-2at-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$]

Rmq je doute que cette rédaction rigoureuse apparaisse dans les copies. J'imagine que les correcteurs seront indulgents.

1.b) • $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$

• $e^{-2at-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ cvge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

• les intégrales sont à termes positifs

cl [selon le thme de comparaison $\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$ donc par Chasles

$J_a = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$ cvge.]

2. $F_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}\,dt$ pour tt $x\in\mathbb{R}$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2ax-2at-t^2}\,dt$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2ax}\times e^{-2at-t^2}\,dt$$

$$= e^{2ax}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt \quad \text{) linéarité}$$

$$= e^{2ax}\Big(\underbrace{\int_x^{0} e^{-2at-t^2}\,dt}_{I} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt}_{J_a}\Big) \quad \text{) chasles}$$

- I est convergente car c'est l'intégrale d'une fct continue sur un segment
- J_a est convergente selon 1.6)
- $x\mapsto e^{2ax}$ est définie sur $\mathbb{R}$

cl [La fonction I_a est définie sur $\mathbb{R}$]

3.a) Soit $x\in\mathbb{R}$ $\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = \int_x^0 e^{-2at-t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$ (chasles)

$$= J_a - \int_0^x e^{-2at-t^2}\,dt$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-2at-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = J_a$

cl $\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = J_a - J_a = 0\right]$

3.b) Supposons que $a\geq 0$.

$\forall t\geq x$ $\quad x-t\leq 0$ donc $2a(x-t)\geq 0$

puis $\quad -2a(x-t)\leq 0$

alors $\quad -2a(x-t)-t^2\leq -t^2$) $-t^2$

En intégrant termes à termes (les bornes sont dans le bon sens et les intégrales convergent) :

$$\int_x^{+\infty} e^{-2a(x-t)-t^2}\,dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \leftarrow$$

c'est une intégrale de Gauss donc convergente

cl $\left[\text{Si } a\geq 0 \text{ alors } \forall x\in\mathbb{R} \quad I_a(x)\leq\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right]$

3.c) • Si $a<0$ selon 2. $I_a(x) = e^{2ax}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt$ pour tt $x\in\mathbb{R}$

or selon 3.a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\,dt = 0$

et comme $a<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2ax = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = 0$

d'où par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$

• Si $a \geq 0$ alors selon 3.b) $I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

De plus $I_a(x) \geq 0$ (intégrale d'une fct positive avec les bornes dans le bon sens).

On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

De plus, selon un raisonnement analogue à celui du 3.b)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0$

d'où selon le thm de l'encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$

d'où selon les deux points précédents, quelque soit le signe de a on a

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0}$

Partie I

4. (2) $y' = 2ay \iff y' - 2ay = 0$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } S = \{t \mapsto \lambda e^{2at} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{2at})}$

5.a) Par propriété $F_a : x \mapsto \int_0^x e^{-2at-t^2} dt$

est une primitive de $x \mapsto e^{-2ax-x^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

d'où $\boxed{F_a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad F_a'(x) = e^{-2ax-x^2}}$

5.b) On a déjà vu en 2 que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad I_a(x) = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt$

$$= e^{2ax}\left(\int_x^0 e^{-2at-t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt\right)$$

$$= e^{2ax}\left(-\int_0^x e^{-2at-t^2} dt + J_a\right)$$

$$= e^{2ax}(J_a - F_a(x))$$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad I_a(x) = e^{2ax}(J_a - F_a(x))}$

5.c) $x \mapsto e^{2ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et J_a est constante. Dès lors I_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad I_a'(x) = 2a e^{2ax}(J_a - F_a(x)) - e^{2ax} F_a'(x)$$

$$= 2a e^{2ax}(J_a - F_a(x)) - e^{2ax} \times e^{-2ax - x^2} \quad \text{selon } 5.a)$$

$$= 2a e^{2ax}(J_a - F_a(x)) - e^{-x^2}$$

$$= 2a I_a(x) - e^{-x^2}$$

cl [I_a est solution de l'équation différentielle (1)]

6. Selon 4. les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{2at}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Selon 5.c) I_a est une solution particulière de (1)

cl [L'ens. des solutions de (1) est : $\mathcal{S} = \{ t \mapsto \lambda e^{2at} + I_a(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R} \}$]

7.a) Si $a < 0$ $\quad \lim\limits_{t \to +\infty} e^{2at} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} I_a(t) = 0$

[Dans ce cas toutes les solutions de (1) sont convergentes]

7.b) Si $a = 0$ $\quad \lim\limits_{t \to +\infty} e^{2at} = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} I_a(t) = 0$

Dans ce cas la seule solution qui converge vers 0 est pour $\lambda = 0$

[$t \mapsto I_a(t)$]

7.c) Si $a > 0$ $\quad \lim\limits_{t \to +\infty} e^{2at} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} I_a(t) = 0$

La seule solution convergente est pour $\lambda = 0$:

[$t \mapsto I_a(t)$]

Partie II

8.a) Une densité de X est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right) \qquad \text{où } m = E(X) = -a \text{ et } \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{2}$$

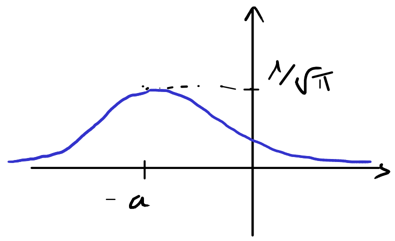
$$= \frac{1}{1/\sqrt{2}} \cdot \varphi\left(\frac{t+a}{1/\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\, \varphi(\sqrt{2}(t+a))$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}(t+a))^2/2}$$

cl [Une densité de X est donnée par $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t+a)^2}$]

8.b) Le maximum de φ est atteint en $-a$ et vaut $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$



9.a) [$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(X \geqslant x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(t+a)^2} dt$]

9.b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt$

et $\sqrt{\pi}\, e^{2ax+a^2} P(X \geqslant x) = \cancel{\sqrt{\pi}}\, e^{2ax+a^2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}}} e^{-(t+a)^2} dt$

$$= e^{2ax+a^2} \int_x^{+\infty} e^{-(t^2+2at+a^2)} dt$$

$$= e^{2ax} \times \cancel{e^{a^2}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2at} \times \cancel{e^{-a^2}} dt$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2ax-2at-t^2} dt$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt$$

cl [$\forall x \in \mathbb{R} \quad I_a(x) = \sqrt{\pi}\, e^{2ax+a^2} P(X \geqslant x)$]

10. Par stabilité si $Z \hookrightarrow N(0,1)$ alors $\alpha Z + \beta$ suit une loi normale de paramètres $E(\alpha Z+\beta) = \alpha E(Z) + \beta = \beta$

et $V(\alpha Z + \beta) = \alpha^2 V(Z) = \alpha^2$

cl [Si on pose $\alpha^2 = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = -a$ alors $\alpha Z + \beta$ suit la même loi que X.]

10.b)
```
def estim_proba(a,x):
    num =0
    for i in range(10000):
        Z = rd.normal()
        X = 1/np.sqrt(2)*Z - a
        if X <= x :
            num = num+1
    return num/10000
```

11.

```
def approx_I(a, x):
        return np.exp(2*a*x + a**2) * np.sqrt(np.pi) * estim_proba(a, x)
```

BILAN

Cet exercice était difficile. Les notations étaient assez lourdes et les calculs relativement techniques.

Il y avait moyen de gagner des points avec le thm de comparaison et la partie II sur les équations différentielles.

Les questions d'informatique étaient relativement accessibles

Exercice 3

1.a) M est symétrique donc diagonalisable.

1.b) $M+I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $(M+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I)$

Dès lors $(M+I_3)^2 - 3(M+I_3) = 0$

ou encore $(M+I_3)(M+I_3-3I_3) = 0$

soit enfin $(M+I_3)(M-2I_3) = 0$

cl $\boxed{P : x \mapsto (x+1)(x-2) \text{ est un polynôme annulateur de } M.}$

1.c) Les valeurs propres possibles de M sont les racines de P.

Or $P(x) = (x+1)(x-2)$ a pour racines -1 et 2.

Donc $\boxed{Sp(M) \subset \{-1, 2\}}$

• Déterminons $E_{-1}(M)$

$$E_{-1}(M) = Ker(M+I_3) = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M+I_3)X = 0_{3,1}\}$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a $M+I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $X \in E_{-1}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{ x+y+z = 0$

le système est de rang 1 à 3 inconnues donc il y a une infinité de solutions à $3-1=2$ paramètres. Disons y et z.

$$X \in E_{-1}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y-z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il vient $E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \left\{ y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= Vect(X_1, X_2)$ où $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

X_1 et X_2 sont non colinéaires donc forment une famille libre et donc une base de $E_{-1}(M)$

cl $\left[-1 \text{ est valeur propre de } M \text{ et } (X_1, X_2) \text{ est une base de } E_{-1}(M) \right]$
avec $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

• <u>Déterminons une base de $E_2(M)$</u>

$$E_2(M) = \ker(M - 2I_3) = \{ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \quad | (M+2I_3)X = 0 \}$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a $M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$X \in E_2(M) \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 / 3$$

Le système est de rang 2 à 3 inconnues. Il y a une infinité de solutions à 1 paramètre disons z

Dès lors, $X \in E_2(M) \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Il vient $E_2(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$
$= \mathrm{Vect}(X_3)$ avec $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_3 \neq 0$ donc (X_3) est libre et c'est donc une base de $E_2(M)$

cl $\left[2 \text{ est VP de } M \text{ et une base de } E_2(M) \text{ est } (X_3) \text{ avec } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

1.d) La matrice P^{-1} étant donnée. Il suffit de vérifier que le produit de cette matrice par P est égale à I_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{*} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

* $1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$

On a donc $P\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 3I_3$

puis $P \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = I_3$

cl [P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$]

1.e) On peut faire le produit $P^{-1}MP$ mais de manière plus élégante on peut remarquer que $P = \begin{array}{c}\begin{matrix}X_1 & X_2 & X_3\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base (X_1, X_2, X_3) qui est une base de vecteurs propres de M.

On a donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

valeurs propres de M associées à X_1, X_2, X_3

cl [$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$]

1.f) Soit $P(k)$ la pté « $M^k = PD^kP^{-1}$ »

- Initialisation

$P(0)$ est vraie car $M^0 = I_3$

et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$

- Hérédité

Soit k un entier fixé. Supposons $P(k)$, montrons $P(k+1)$.

$$\begin{aligned}M^{k+1} &= M^k . M\\ &= PD^kP^{-1}M \quad \text{(HdR)}\\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} \quad (P^{-1}MP = D \text{ donc } M = PDP^{-1})\\ &= PD^kI_3DP^{-1}\\ &= PD^{k+1}P^{-1}\end{aligned}$$

et $P(k+1)$ est vraie

cl selon le principe de récurrence [$\forall k \in \mathbb{N} \quad M^k = PD^kP^{-1}$]

1.g) Soit $k \in \mathbb{N}$ $D^k = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}$

donc $PD^k = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2^k\\ -1 & 0 & 2^k\\ 0 & -1 & 2^k\end{pmatrix}$

puis $PD^kP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2^k \\ -1 & 0 & 2^k \\ 0 & -1 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+2^k & -1+2^k & -1+2^k \\ -1+2^k & 2+2^k & -1+2^k \\ -1+2^k & -1+2^k & 2+2^k \end{pmatrix}$

On remarque que $PD^kP^{-1} = \frac{1}{3}(2+2^k)I_3 + \frac{1}{3}(-1+2^k)M$

cl $\left[\forall k \in \mathbb{N} \quad M^k = a_k M + b_k I_3 \quad \text{avec} \quad a_k = \frac{1}{3}(2^k - 1) \text{ et } b_k = \frac{1}{3}(2+2^k)\right]$

2.a) On calcule J_n^2. On a $J_n^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ_n$

Soit $P(k)$ la pté « $J_n^k = n^{k-1} J_n$ »

- Initialisation

$P(1)$ est vraie car $J_n^1 = n^{1-1} J_n = J_n$

- Hérédité

Soit $k \geq 1$ un entier fixé. Supposons $P(k)$, montrons $P(k+1)$

$$\begin{aligned} J_n^{k+1} &= J_n^k \cdot J_n \\ &= n^{k-1} J_n \cdot J_n \quad (\text{HdR}) \\ &= n^{k-1} J_n^2 \\ &= n^{k-1} \times n J_n \quad \text{cf calcul ci-dessus} \\ &= n^k J_n \quad \text{et } P(k+1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

cl selon le principe de récurrence $\left[\forall k \in \mathbb{N}^* \quad J_n^k = n^{k-1} J_n\right]$

2.b) Je remarque que $\left[M_n = J_n - I_n\right]$

2.c) On pourrait procéder par récurrence mais cela sera plus élégant en utilisant la formule du binôme.

J_n et I_n commutent donc :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \quad M_n^k = (J_n - I_n)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-1)^{k-i} I_n^{k-i} + \underbrace{(-1)^k I_n}_{\text{terme en } 0} \quad I_n^{k-i} = I_n \\ &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} J_n (-1)^{k-i} I_n + (-1)^k I_n \quad \text{car } J_n^i = n^{i-1} J_n \\ &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} J_n + (-1)^k I_n \end{aligned}$$

cl $\left[\forall k \in \mathbb{N}^* \quad M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}\right]$

2.d) $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i}$$
$$= \frac{1}{n} \Big(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} \underbrace{- (-1)^k}_{\text{terme en 0}} \Big)$$
$$= \frac{1}{n} \left((n-1)^k - (-1)^k \right) \quad \text{(formule du binôme)}$$

cl $\left[\forall k \in \mathbb{N}^* \quad c_k = \dfrac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} = \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} \right]$

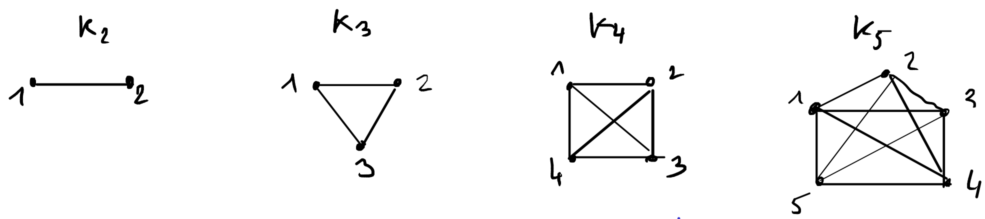
2.e) Selon les questions précédentes, pour tt $k \in \mathbb{N}^*$

$$M_n^k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} J_n + (-1)^k I_n$$
$$= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

cl [les coefficients diagonaux de M_n^k valent pour tt $k \geq 1$ $\dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} + (-1)^k$
les coefficients non diagonaux valent $\dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}$]

Partie II

3.



4.a)

$$\begin{array}{c c l} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix} & \leftarrow \text{sommets} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array}$$

[On remarque que la matrice d'adjacence de K_n est M_n]

4.b) Le nombre de chemins reliant le sommet 1 à lui-même est le coefficient $(1,1)$ de $K_4^4 = M_4^4$

Selon 2.e) c'est $\dfrac{(4-1)^4 + (-1)^{4+1}}{4} + (-1)^4 = \dfrac{3^4 - 1}{4} + 1$
$= \dfrac{81-1}{4} + 1 = 21$

cl [il y a 21 chemins de longueur 4 reliant 1 à lui-même dans K_4]

5. Chacun des n sommets est relié à chacun des $n-1$ autres.

cl [Chaque sommet de K_n est de degré $n-1$]

6. Selon la formule d'Euler
$$\sum_{k=1}^{m} d(k) = 2\,\mathrm{card}(\mathcal{A})$$
où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des arêtes.

Selon 5 pour tt $k \in [\![1,n]\!]$ $d(k) = n-1$

Il vient $\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(m-1) = \frac{1}{2}(n-1)\sum_{k=1}^{m} 1 = \frac{1}{2}(m-1)m$

cl $\left[\text{Le nombre d'arêtes de } K_n \text{ est } \frac{m(m-1)}{2}\right]$

Partie II

7. • $V_0 = (P(X_0=1) \;\dots\; P(X_0=m)) = (1 \;\; 0 \;\dots\; 0)$ car à l'instant 0 on se trouve sur le sommet 1.

• $V_1 = (P(X_1=1) \;\dots\; P(X_1=n)) = (0 \;\; \frac{1}{n-1} \;\dots\; \frac{1}{n-1})$ car depuis le sommet 0 on part de manière équiprobable vers l'un des $n-1$ autres sommets que 1

cl $\left[V_0 = (1 \;\; 0 \;\dots\; 0) \text{ et } V_1 = (0 \;\; \frac{1}{n-1} \;\dots\; \frac{1}{n-1})\right]$

8. La matrice de transition de la chaîne de Markov est

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix} & \longleftarrow \text{sommet d'arrivée} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array}$$

sommet de départ

cl $\left[\text{la matrice de transition de la chaîne est } \frac{1}{n-1}M_n\right]$

9. a) Un état stable de la chaîne est une matrice ligne V telle que

- V est stochastique (coeff positifs de somme égale à 1)
- $V = V \cdot \frac{1}{n-1}M_n$

9. b) Posons $V = (\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n})$

• V est stochastique car ses coeff. sont positifs de somme 1

• $VM_n = (\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= (\frac{n-1}{m}^{*} \;\; \frac{n-1}{m} \;\dots\; \frac{n-1}{m})$ $\quad$ * $\frac{1}{n}\times 0 + \frac{1}{n}\times 1 + \dots + \frac{1}{n}\times 1 = \frac{n-1}{m}$

Donc $V \cdot \frac{1}{n-1}M_n = (\frac{1}{n} \;\; \frac{1}{n} \;\dots\; \frac{1}{n}) = V$

cl $\left[V \text{ est un état stable de la chaîne}\right]$

10.a) [On a pour tt $k \in \mathbb{N}$ $\quad V_{k+1} = V_k \cdot \frac{1}{n-1} M_n$]

10.b) Soit $\mathcal{P}(k)$ la pté « $V_k = V_0 \frac{1}{(n-1)^k} M_n^k$ »

- <u>Initialisation</u>

  $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $V_0 \frac{1}{(n-1)^0} M_n^0 = V_0 \cdot 1 \cdot I_n = V_0$

- <u>Hérédité</u>

  Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$

$$V_{k+1} = V_k \cdot \frac{1}{n-1} M_n \quad \text{selon 10.a)}$$
$$= V_0 \frac{1}{(n-1)^k} M_n^k \cdot \frac{1}{n-1} M_n \quad (\text{HdR})$$
$$= V_0 \frac{1}{(n-1)^{k+1}} M_n^{k+1} \quad \text{donc } \mathcal{P}(k+1) \text{ est vraie}$$

cl par récurrence [$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad V_k = V_0 \frac{1}{(n-1)^k} M_n^k$]

10.c) Selon 10.b) et 2.c) on a :

$$V_k = V_0 \frac{1}{(n-1)^k} \left[\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} J_n + (-1)^k I_n \right]$$

$V_0 = (1\ 0\ \dots\ 0)$ et $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ donc $V_0 J_n = (1\ \dots\ 1)$

puis $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ donc $V_0 I_n = (1\ 0\ \dots\ 0)$

il vient $V_k = \frac{1}{(n-1)^k} \left[\frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} (1 \dots 1) + (-1)^k (1\ 0\ \dots\ 0) \right]$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} \right) (1\ \dots\ 1) + \frac{(-1)^k}{(n-1)^k} (1\ 0\ \dots\ 0)$$

<u>Si $n \geqslant 2$</u>, $\lim_{k \to +\infty} (n-1)^k = +\infty$ et $((-1)^k)$ est bornée donc $\lim_{k \to +\infty} \frac{(-1)^k}{(n-1)^k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)^k} = 0$

cl si $n \geqslant 2$ $\quad \lim_{k \to +\infty} V_k = \frac{1}{n} (1 \dots 1) = \left(\frac{1}{n}\ \dots\ \frac{1}{n}\right)$

on a donc pour tt $i \in [\![1, n]\!]$ $\quad \lim_{k \to +\infty} P(X_k = i) = \frac{1}{n}$

[La chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une loi uniforme]

⚠ erreur d'énoncé ! Si $n = 2$ la chaîne de Markov n'est pas convergente en loi.

11. On remarque que $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un état stable de la chaîne de Markov.

BILAN

Le début de l'exercice était extrêmement classique pour ne pas dire banal. Les questions 1.a) à 1.g) auront permis aux étudiants sérieux de montrer leurs qualités.

La question 2 était plus délicate et aura été peu traitée à mon avis.

La partie II était très facile pour ceux qui avaient bien revu le cours de 1ère année sur les graphes.

La partie III nécessitait plus de technique mais vu la longueur du sujet elle aura sans doute peu été abordée

BILAN GENERAL

L'exercice 2 était trop dur. Le reste du sujet était plutôt bien conçu avec des questions assez progressives. Le sujet permettra aux jurys de bien départager les candidats ce qui est l'objectif.

Vu la longueur du sujet, je pense qu'un étudiant qui aura traité correctement les deux tiers du sujet aura une excellente note.