Exercice 1

1.a) $\forall x \in [0,1]$ $\quad \dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{2+x} = \dfrac{a(2+x)+b(2-x)}{(2-x)(2+x)}$

$$= \frac{x(a-b)+2a+2b}{4-x^2}$$

Il suffit de poser $\begin{cases} a-b=0 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4a=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow a=b=1/4$$

cl $\left[\forall x \in [0,1] \quad \dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{1/4}{2-x} + \dfrac{1/4}{2+x} \right]$

1. b) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2-x}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2+x}\,dx \qquad \text{selon } 1.b)$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-1}{2-x}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2+x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\ln(|2-x|)\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[\ln(|2+x|)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\ln(1)-\ln(2)\right) + \frac{1}{4}\left(\ln(3)-\ln(2)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln(3)$$

cl $\left[u_0 = \frac{1}{4}\ln(3) \right]$

2) $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln(|4-x^2|)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln(3)-\ln(4)\right)$$

cl $\left[u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) \right]$ $= \ln\left(\sqrt{4/3}\right) = \ln\left(2/\sqrt{3}\right)$ (cf. 3.b))

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad 4u_n - u_{n+2} = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2}\,dx \qquad \text{(linéarité)}$$

$$= \int_0^1 x^n \, \frac{4-x^2}{4-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

cl $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad 4u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$

3.b)

```python
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :          # si n est paire
        u = np.log(3)/4        # valeur de u0
        for k in range(2,n+1,2):
            u = 4*u - 1/(k-1)  # car u_k = 4u_{k-2} - 1/(k-1) selon 3a)
    else :
        u = np.log(2/np.sqrt(3))  # valeur de u1
        for k in range(3,n+1,2):
            u = 4*u - 1/(k-1)
    return u
```

4.a) Pour $\forall\, n\in\mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx$

Soit $x\in[0,1]$ $\quad 0\leq x\leq 1$

donc $0\leq x^2\leq 1$ $\quad x\mapsto x^2$ est croissante sur $[0,1]$

puis $-1\leq -x^2\leq 0$ $\Big\} \times(-1)$

alors $3\leq 4-x^2\leq 4$ $\Big\} +4$

il vient $\frac{1}{4}\leq \frac{1}{4-x^2}\leq \frac{1}{3}$ car $x\mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

enfin $\frac{x^n}{4}\leq \frac{x^n}{4-x^2}\leq \frac{x^n}{3}$

En intégrant terme à terme (les bornes sont dans le bon sens)

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4}\,dx \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3}\,dx$$

or $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

cl $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{4}\times\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq \frac{1}{3}\times\frac{1}{n+1}}$

4.b) $\lim \frac{1}{4(n+1)} = \lim \frac{1}{3(n+1)} = 0$

cl selon le thme de l'encadrement [la suite (u_n) converge vers 0].

4.c) • $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \geq \frac{1}{4(n+1)} \geq 0$

• $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4(n+1)}$ diverge (série harmonique à chgt d'indice près)

. les séries sont à termes positifs

cl selon le thm de comparaison $\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge} \right]$

5.a) Le script permet d'afficher les termes successifs de la suite $(3n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle semble tendre vers 1.

cl [Je conjecture que $\lim 3n u_n = 1$ donc que $u_n \sim \frac{1}{3n}$]

5.b) Soit $n\in\mathbb{N}$ $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx$

je pose $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{4-x^2} \\ v'(x) = x^n \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc par intégration par parties

$$u_n = \left[\frac{1}{4-x^2} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{(4-x^2)} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$$

cl $\left[\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \right]$

5.c) Soit $x\in[0,1]$ $\quad 0\leq x\leq 1 \Rightarrow 0\leq x^2\leq 1$

$$\Rightarrow 3\leq 4-x^2\leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\leq \frac{1}{4-x^2}\leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16}\leq \frac{1}{(4-x^2)^2}\leq \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+2}}{16}\leq \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\leq \frac{x^{n+2}}{9}$$

en intégrant terme à terme avec les bornes dans le bon sens

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9}\,dx$$

Enfin $\int_0^1 x^{n+2}\,dx = \left[\frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{n+3}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{9(n+3)}$

$\lim \frac{1}{n+3} = 0$ donc selon le thm de l'encadrement $\left[\lim \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 0 \right]$

5. d) Selon 5.b) $u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx$

donc $3n u_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx$

$\lim \frac{n}{n+1} = 1$ car $n+1 \sim n$ donc selon 5.c)

$\lim \frac{6n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}dx = 0$

Dès lors par somme de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n u_n = 1$

ie $3n u_n \sim 1$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{3n}}$

BILAN

Cet exercice était particulièrement classique. Il ressemblait beaucoup à plusieurs exercices que nous avions fait ensemble. Seule la question 3.b) (informatique) était une peu plus délicate.

Exercice 2

1. a) • f est positive sur $\mathbb{R}$

- car elle est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$
- car sur $\mathbb{R}_+$ $f(x) = x e^{-x^2/2} \geqslant 0$

• f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0

- car elle est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$
- comme produit de fct usuelles continues sur $\mathbb{R}_+$

• Etudions $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2/2}\,dx$$
$$= \int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2/2}\,dx$$

cette intégrale est impropre en $+\infty$ car $x \mapsto x e^{-x^2/2}$ est continue sur $[0, +\infty[$

Je pose $I(A) = \int_0^A x e^{-x^2/2}\,dx$

$$= -\int_0^A \underbrace{-x e^{-x^2/2}}_{u' e^u}\,dx$$
$$= -\left[e^{-x^2/2}\right]_0^A$$
$$= -(e^{-A^2/2} - 1)$$
$$= 1 - e^{-A^2/2}$$

$\lim\limits_{A \to +\infty} -\frac{A^2}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A^2/2} = 0$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} I(A) = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et est égale à 1

cc selon les 3 points précédents $\left[f \text{ est une densité de probabilité} \right]$

1. b) Soit $Y \hookrightarrow N(0,1)$. Alors Y admet une variance et $V(Y) = 1$

Dès lors (Koenig-Huygens) $1 = V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

donc $1 = E(Y^2) - 0^2$

cl $\left[\text{Si } Y \hookrightarrow N(0,1) \; Y \text{ admet un moment d'ordre 2 et } E(Y^2) = 1\right]$

1.c) $E(X)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge absolument.

or $$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx \quad \text{car } x \mapsto x^2 e^{-x^2/2} \text{ est paire}$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\,dx \quad \text{où } \varphi \text{ est la densité de } Y.$$

or selon 1.b) Y admet un moment d'ordre 2.

cl l'intégrale est donc absolument convergente, selon le thme de transfert, donc X admet une espérance et
$$E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} E(Y^2) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \times 1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

- Si $x<0$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$
- Si $x \geq 0$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x t e^{-t^2/2}\,dt$ (Chasles)
$$= -\left[e^{-t^2/2}\right]_0^x \quad (\text{cf. } 1.a))$$
$$= 1 - e^{-x^2/2}$$

cl Pour tt $x \in \mathbb{R}$ on a $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

3.a)
- si $x<0$ $F_Z(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ car X^2 est à valeurs positives
- si $x \geq 0$ $F_Y(x) = P(X^2 \leq x)$
$$= P(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{x}) \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$
$$= P(|X| \leq \sqrt{x})$$
$$= P(-\sqrt{x} \leq X < \sqrt{x})$$
$$= F_X(\sqrt{x}) - F_X(\sqrt{x})$$

or selon 2. $F_X(\sqrt{x}) = 1 - e^{-(\sqrt{x})^2/2} = 1 - e^{-x/2}$

et $F_X(\sqrt{x}) = 0$

cl Pour $\forall$ réel x $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Donc $\left[Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2}) \right]$

3.b) On a donc $X=\sqrt{Z}$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ (je peux écrire la racine carrée car $Z(\Omega)=[0,+\infty[$.)

```
def simulX():
    Z = rd.exponential(2)
    return np.sqrt(Z)
```

!

4.a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \, \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad G_n(x) = P(Y_n \leq x)$

$= P\left(\frac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right)$

$= P(X \leq \sqrt{n}\, x)$

$= F_X(\sqrt{n}\, x)$

selon 2. $G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-(\sqrt{n}x)^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

cl $\left[\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-n x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \right]$

4.b) • si $x<0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$

• si $x>0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} -n\frac{x^2}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n x^2/2} = 0$

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$

cl $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Je ne regarde pas la limite en 0 car la fct° $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

cl $\left[(Y_n) \text{ converge en loi vers la variable aléatoire certaine égale à } 0 \text{ de fct de répartition } x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \right]$

5.c) $|Y_n|$ est une variable aléatoire à valeur positive admettant une espérance $E(|Y_n|) = \frac{1}{\sqrt{n}} E(|X|) = \frac{1}{\sqrt{n}} E(X) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

car X est à valeurs positives

Selon l'inégalité de Markov (qui selon le programme officiel n'est pas à connaître) $\forall \varepsilon>0 \quad P(|Y_n|>\varepsilon) \leq \dfrac{E(Y_n)}{\varepsilon}$

cl $\forall \varepsilon>0 \quad 0 \leq P(|Y_n|>\varepsilon) \leq \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\varepsilon} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = 0$ donc $\left[\forall \varepsilon>0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n|>\varepsilon)=0\right]$

5.a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
P(M_n > x) &= P(\min(X_1,\dots,X_n) > x) \\
&= P((X_1>x)\cap\dots\cap(X_n>x)) \\
&= P(X_1>x)\dots P(X_n>x) \quad \text{à indépendance} \\
&= (1-F_{X_1}(x))\dots(1-F_{X_n}(x)) \\
&= (1-F_X(x))^n \quad \text{car les } X_i \text{ suivent la même loi que } X
\end{aligned}$$

cl $\left[\forall n\in\mathbb{N}^* \ \forall x\in\mathbb{R} \quad P(M_n>x) = (1-F_X(x))^n\right]$

Alors
$$\begin{aligned}
F_{M_n}(x) &= P(M_n \leq x) \\
&= 1 - P(M_n > x) \\
&= 1-(1-F_X(x))^n
\end{aligned}$$

or selon 2. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x^2/2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

donc $1-F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ e^{-x^2/2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

puis $(1-F_X(x))^n = \begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ e^{-nx^2/2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

enfin $1-(1-F_X(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-nx^2/2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases} = G_n(x)$

cl $\left[M_n \text{ suit la même loi que } Y_n \text{ pour tt } n\in\mathbb{N}^*\right]$

5.b)
```
def simulM(n):
    X = np.array([simulX() for k in range(n)])
    M = np.min(X)
    return M
```

BILAN

les questions 1 à 3 étaient très classiques. Vous avez certainement reconnu la loi de Rayleigh étudiée dans l'ex 3 du TD 20.
Les questions 4 et 5 étaient plus délicate et auront permis aux meilleurs de se mettre en valeur.

Exercice 3

1. On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t)\,dt \quad (*)$

Dans $\int_0^x t f(x-t)\,dt$

① je pose $u = x - t$ ie $t = x - u$

② je cherche α, β tq $\begin{cases} x - \alpha = 0 \\ x - \beta = x \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = 0 \end{cases}$

③ $u \mapsto x - u$ est C^1 sur $\mathbb{R}$

④ $t = x - u$ donc $\frac{dt}{du} = -1$ et $dt = -du$

Dès lors $\int_0^x t f(x-t)\,dt = \int_x^0 (x-u) f(u)(-du)$

$= \int_0^x (x-u) f(u)\,du$

cl $\left[(*) \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\,du \right]$

2.a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ solution de $(*)$

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u f(u)\,du$ (linéarité).

$u \mapsto f(u)$ et $u \mapsto u f(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par propriété $F : x \mapsto \int_0^x f(u)\,du$ et $G : x \mapsto \int_0^x u f(u)\,du$ sont des primitives de ces fcts.

En particulier ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + xF(x) - G(x)$ où F et G sont C^1 sur $\mathbb{R}$.

Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ par opération sur les fonctions de classe C^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 + 1.F(x) + xF'(x) - G'(x)$$
$$= 1 + \int_0^x f(u)\,du + xf(x) - xf(x)$$

cl $\left[f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 + \int_0^x f(u)\,du \right]$

2.b) En reprenant les notations de 2a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 + F(x)$ où F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

f' est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = F'(x) = f(x)$$

cl $\left[f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = f(x) \right]$

2.c) On a l'équation différentielle $y'' = y \Leftrightarrow y'' - y = 0$

Soit l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+1) = 0$

$\Leftrightarrow r = 1$ ou $r = -1$

$\underline{\underline{\text{cl}}}$ $\left[\ \mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \lambda e^{t} + \mu e^{-t} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}\ \right]$

2.d) f vérifie $(*)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 1 + \int_0^x t f(t-x)\,dt$

et selon 2.a) $f'(x) = \int_0^x f(u)\,du$

Dès lors $f(0) = 1 + \int_0^0 t f(t-x)\,dt = 1$

et $f'(0) = \int_0^0 f(u)\,du = 0$

$\underline{\underline{\text{cl}}}$ $\left[\ f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0\ \right]$

Selon les points précédents si f est solution de $(*)$ alors elle vérifie le problème de Cauchy : $\begin{cases} f'' = f \\ f'(0) = 0 \text{ et } f(0) = 1 \end{cases}$

Selon 2.c) on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$

donc $f'(x) = \lambda e^{x} - \mu e^{-x}$

Alors $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda = \mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu = 1 \\ \lambda = \mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}$

$\underline{\underline{\text{cl}}}$ $\Big[$ $(*)$ admet au plus une solution qui est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\Big]$

3. Si $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ alors

$$1 + \int_0^x t f(x-t)\,dt = 1 + \int_0^x t \cdot \frac{e^{x-t} + e^{-x+t}}{2}\,dt$$

$$= 1 + \int_0^x t \cdot \frac{e^{x} \cdot e^{-t} + e^{-x} e^{t}}{2}\,dt$$

$$= 1 + \frac{e^{x}}{2} \int_0^x t e^{-t}\,dt + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x t e^{t}\,dt$$

- $\underline{\text{calculons}}$ $\int_0^x \underline{t e^{-t}\,dt}$

Je pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc en intégrant par partie :

$$\int_0^x te^{-t}\,dt = \left[t \times (-e^{-t})\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$$
$$= -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

- <u>calculons $\int_0^x te^{-t}\,dt$</u>

Je pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^{t} \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc en intégrant par partie :

$$\int_0^x te^{t}\,dt = \left[t \times e^{t}\right]_0^x - \int_0^x e^{t}\,dt$$
$$= xe^{x} - \left[e^{t}\right]_0^x$$
$$= xe^{x} - e^{x} + 1$$

Il vient $1 + \int_0^x tf(x-t)\,dt = 1 + \frac{e^x}{2}\left[-xe^{-x} - e^{-x} + 1\right] + \frac{e^{-x}}{2}\left[xe^{x} - e^{x} + 1\right]$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \qquad \swarrow\ e^x . e^{-x} = e^0 = 1$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$$

cl $\left[\text{Si } f \text{ est la fonction trouvée en 2.d) alors } f \text{ est bien solution de } (*)\right]$

4. Soit $(**)$ l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = \int_0^x tf(x-t)\,dt$

Alors comme dans 1. $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = \int_0^x (x-u)f(u)\,du$

Puis comme dans 2.a) f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x) = \int_0^x f(u)\,du$

Alors f est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\quad f''(x) = f(x)$.

Si f est solution de $(**)$ alors elle vérifie l'équation différentielle $f'' = f$.

Mais cette fois les conditions initials sont $f(0) = f'(0) = 0$

Dans ce cas l'unique solution du problème de Cauchy est $f : x \mapsto 0$.

Réciproquement la fct nulle vérifie bien $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = \int_0^x tf(x-t)\,dt$

cl $\left[(**) \text{ possède une unique solution qui est la fct nulle}\right]$

BILAN

Cet exercice était beaucoup plus délicat que les deux précédents. Peu de questions étaient accessibles. On pouvait glaner des points en 2.c), 2.d) et 3.

PROBLÈME

1.a) A l'instant 0 il y a une boule blanche et boule noire dans A et B.
Il y a donc une boule blanche dans A.
cl $[a_0 = 0 \,,\ b_0 = 1$ et $c_0 = 0]$

1.b) $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

- $(X_1 = 0)$ si on prend une blanche dans A et une noire dans B
  donc $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (indépendance)
- $(X_1 = 1)$ si on prend une blanche dans A et une blanche dans B
  ou une noire dans A et une noire dans B.
  donc $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $(X_1 = 2)$ si on prend une noire dans A et une blanche dans B
  donc $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

cl $\left[a_1 = \frac{1}{4},\ b_1 = \frac{1}{2},\ c_1 = \frac{1}{4}\right]$

1.c) Il y a en tout deux blanches et deux noires. Il est donc clair qu'à tout instant il y a entre 0 et 2 boules blanches dans A.
[Dès lors $X_n(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$ et $(X_n = 2)$ forment un système complet d'événements.]

1.d) $[\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n + b_n + c_n = P(X_n = 0) + P(X_n = 1) + P(X_n = 2) = 1]$

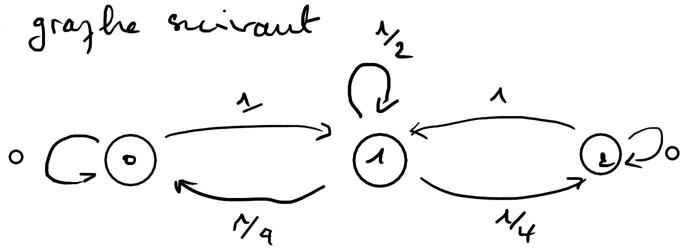
2.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- * Si $(X_n = 1)$ alors on est dans les conditions initiales.
  Dès lors, selon 1.b) $\left[P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4} \ ; \ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} \ ; \ P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}\right]$
- * Si $(X_n = 0)$ alors A contient 2 boules noires et B deux boules blanches donc tout échange amène nécessairement exactement une boule blanche dans A :
  $\left[P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) = 0 \ ; \ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1 \ ; \ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 0\right]$

* Si $(X_n=2)$ alors A contient 2 boules blanches et B deux boules noires donc tout échange amène nécessairement exactement une boule blanche dans A :

$$\left[P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0 \ ; \ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1 \ ; \ \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0 \right]$$

on a donc le graphe suivant



2.b) $M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$ ← sommets d'arrivée

← sommets de départ

La matrice M est bien stochastique

2.c) Les évts $(X_n=0)$, $(X_n=1)$ et $(X_n=2)$ forment un SCE donc selon la FPT

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0) = \mathbb{P}((X_n=0)\cap(X_{n+1}=0)) + \mathbb{P}((X_n=1)\cap(X_{n+1}=0)) + \mathbb{P}((X_n=2)\cap(X_{n+1}=0))$$

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(X_n=0)\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) + \mathbb{P}(X_n=1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) + \mathbb{P}(X_n=2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)$$

$$= 0.a_n + \frac{1}{4}.b_n + 0.c_n$$

De même

$$b_{n+1} = \mathbb{P}(X_n=0)\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) + \mathbb{P}(X_n=1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) + \mathbb{P}(X_n=2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$$

$$= 1.a_n + \frac{1}{2}.b_n + 1.c_n$$

et $$c_{n+1} = \mathbb{P}(X_n=0)\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) + \mathbb{P}(X_n=1)\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) + \mathbb{P}(X_n=2)\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)$$

$$= 0.a_n + \frac{1}{4}b_n + 0.c_n$$

cl $\left[\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \ ; \ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \ ; \ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \right]$

3. Selon 1.b) $a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{4}$

Selon 1.a) $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$

donc $\frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4}$; $a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4}$

cl [Les relations de 2.d) restent vraies pour $n=0$]

4.a) Pour tt $n \in \mathbb{N}$ X_n est à support fini donc elle admet une espérance.

$$E(X_{n+1}) = \sum_{k \in X_{n+1}(\Omega)} k P(X_{n+1} = k)$$

$$= 0 . P(X_{n+1}=0) + 1 P(X_{n+1}=1) + 2 P(X_{n+1}=2)$$

$$= b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}}$

4.b) Selon 2.c) on a donc $E(X_{n+1}) = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n + 2 . \frac{1}{4} b_n$

$$= a_n + b_n + c_n$$

$$= 1 \quad \text{1.d)}$$

cl $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad E(X_{n+1}) = 1}$

4.c) On a donc pour tt $n \in \mathbb{N}^*$ $E(X_n) = 1$ (en remplaçant $n+1$ par n).
Cela reste vrai pour $E(X_0)$ puis que X_0 est la v.A certaine égale à 1

On a donc pour tt $n \in \mathbb{N}$ $E(X_n) = 1$

donc $0 . a_n + 1 . b_n + 2 . c_n = 1$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n + 2c_n = 1}$

5.a) Soit $n \in \mathbb{N}$ $U_n V = (a_n \; b_n \; c_n) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= 2a_n - b_n + 2c_n$$

Donc selon 2.c) pour tt $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} V = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

$$= 2 . \frac{1}{4} b_n - (a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n) + 2 . \frac{1}{4} b_n$$

$$= -a_n + \frac{1}{2} b_n - c_n$$

$$= -\frac{1}{2} (2a_n - b_n + 2c_n)$$

$$= -\frac{1}{2} U_n V$$

cl $\boxed{(U_n V)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } -\frac{1}{2}}$

5.b) $U_0 V = 2a_0 - b_0 + 2c_0 = -1$ selon 1.a)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $2a_n - b_n + 2c_n = U_n V = U_0 V \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

cl $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

6. Soit $n\in\mathbb{N}$. Selon 1.d) $a_n+b_n+c_n=1$

selon 4.c) $b_n+2c_n=1$

et selon 5.b) $2a_n-b_n+2c_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

On a donc
$$\begin{cases} a_n+b_n+c_n=1 \\ b_n+2c_n=1 \\ 2a_n-b_n+2c_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n+b_n+c_n=1 \\ b_n+2c_n=1 \\ -3b_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n-2 \end{cases} \quad L_3\leftarrow L_3-2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n=1-b_n-c_n \\ c_n=\frac{1-b_n}{2} \\ b_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6} \\ c_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6} \\ b_n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+2}{3} \end{cases}$$

Cl $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6}\ ;\ b_n=\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}\quad c_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6}$

La loi de X_n est

k	0	1	2
$P(X_n=k)$	$\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6}$	$\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}$	$\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{6}$

7. $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

Alors par opération sur les limites :

$\lim P(X_n=0)=\frac{1}{6}\quad \lim P(X_n=1)=\frac{2}{3}\quad \lim P(X_n=2)=\frac{1}{6}$

Cl $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la v.A X de loi :

k	0	1	2
$P(X=0)$	$1/6$	$2/3$	$1/6$

8. a) $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $M^2=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ puis $M^3=\begin{pmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 3/8 & 5/8 & 3/8 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

on a donc $M^2+M = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 & 1/4 \\ 3/8 & 5/8 & 3/8 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $2M^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/2 & 1/4 \\ 3/8 & 5/8 & 3/8 \\ 1/4 & 3/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

cl $\boxed{2M^3 = M^2 + M}$

8.b) $P : x \mapsto 2x^3 - x^2 - x$ est annulateur de M.

Les valeurs propres de M sont donc des racines de P.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x(2x^2 - x - 1)$

donc $P(x) = 0 \iff x = 0$ ou $2x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4\times 2 = 9 = 3^2$

donc $P(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{1-3}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1+3}{2\times 2} = 1$

cl $\boxed{Sp(M) \subset \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}}$

- Déterminons une base de $E_1(M)$

$E_1(M) = \ker(M - I_3) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M - I_3)X = 0\}$

on a $M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$X \in E_1(M) \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y \quad z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_1$

$\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ car $L_2 = -\frac{1}{4}L_3$

Le système est de rang 2. Il y a une infinité de solutions à $3-2=1$ paramètre. Disons z.

$X \in E_1(M) \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Il vient $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(X_1)$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_1 \neq 0$ donc (X_1) est libre et c'est une base de $E_1(M)$

cl $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M \text{ et } E_1(M) \text{ a pour base } (X_1) \text{ avec } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

• <u>Déterminons une base de</u> $E_{-\frac{1}{2}}(M)$

$$E_{-1/2}(M) = \ker\left(M + \tfrac{1}{2} I_3\right) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \left(M + \tfrac{1}{2} I_3\right) X = 0 \right\}$$

on a $M + \frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$X \in E_{-1/2}(M) \iff \begin{cases} \frac{1}{2} x + y = 0 \\ \frac{1}{4} x + y + \frac{1}{4} z = 0 \\ y + \frac{1}{2} z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2} x + y = 0 \\ \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} z = 0 \\ y + \frac{1}{2} z = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2} x + y = 0 \\ y + \frac{1}{2} z = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_2 = \frac{1}{2} L_3$$

Le système est de rang 2. Il y a une infinité de solutions à $3-2=1$ paramètre. Disons z.

$$X \in E_{-\frac{1}{2}}(M) \iff \begin{cases} x = -2y = z \\ y = -\frac{1}{2} z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il vient $E_{-\frac{1}{2}}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -\frac{1}{2} z \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(X.)$ avec $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_1 \neq 0$ donc (X_1) est libre et c'est une base de $E_{-\frac{1}{2}}(M)$

cl [$-\frac{1}{2}$ est valeur propre de M et $E_{-1/2}(M)$ a pour base (X_2) avec $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$]

Rmq je ne change pas le caractère libre et générateur de (X_2) en multipliant par 2. Je pose donc $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour avoir la 1ère colonne de la matrice P de la question suivante.

• <u>Déterminons une base de</u> $E_{-\frac{1}{2}}(M)$

$$E_0(M) = \ker(M) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0 \right\}$$

on a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$X \in E_0(M) \iff \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{4} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il vient $E_0(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}(X_3) \quad \text{avec } X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X_3 \neq 0$ donc (X_3) est libre. C'est donc une base de $E_0(M)$

cl [0 est valeur propre de M et $E_0(M)$ avec pour base (X_3) avec $(X_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$]

8.c) Je remarque que X_1, X_2 et X_3 sont les colonnes de P.

Or (X_1, X_2, X_3) est libre car c'est la concaténation de familles libres de vecteurs propres de M associés à des valeurs propres distinctes.

[P est donc inversible].

8.d) On peut faire à la main les produits MP et PD

on trouve $MP = PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

plus élégant : $MP = M(X_2\ X_3\ X_1) = (MX_2\ MX_3\ MX_1) = (-\frac{1}{2}X_2\ \ 0\ \ X_1)$

de même $PD = (X_2\ X_3\ X_1)\, D = (-\frac{1}{2}X_2\ \ 0\ \ X_1)$

On a donc $P^{-1}MP = D$

cl [M est semblable à une matrice diagonale. Elle est diagonalisable]

8.e) Selon 2.c) on a pour $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \quad ; \quad b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \quad ; \quad c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$

Dès lors,

$U_{n+1} = (a_{n+1}\ \ b_{n+1}\ \ c_{n+1})$

$= (\frac{1}{4} b_n\ \ \ a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n\ \ \ \frac{1}{4} c_n)$

$= (a_n\ \ b_n\ \ c_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

cl [$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n M$]

8.f) Soit $P(n)$ la pté $U_n = U_0 M^n$

- Initialisation

$P(0)$ est vraie car $U_0 = U_0 M^0 = U_0 I_3$

- Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$

Selon 8.e) $U_{n+1} = U_n M$
$= U_0 M^n M$ hypothèse de récurrence
$= U_0 \Pi^{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

$\underline{\underline{cl}}$ Selon le principe de récurrence $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = U_0 \Pi^n}$

8.g) Pour déterminer la loi de X_n il suffit de déterminer la matrice U_n.
Selon 8.f) $U_n = U_0 \Pi^n$ avec $U_0 = (a_0 \ b_0 \ c_0) = (0 \ 1 \ 0)$
Une récurrence classique montre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Pi^n = P D^n P^{-1}$
avec $\forall n \in \mathbb{N}$ $D^n = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On en déduit par calcul Π^n puis $U_n = U_0 \Pi^n$ et enfin la loi de X_n.

<u>BILAN</u>

Le début de l'exercice était bien balisé. Les question 1 à 4 auront permis aux étudiants sérieux de se mettre en valeur.
La suite était plus délicate, en particulier la question 5.
Les questions d'algebre linéaire en 8 étaient accessible à condition d'avoir le temps de les aborder.

<u>BILAN général</u>

Le sujet était bien fait. Il était bien adapté au profil des candidats
Il permettra au jury de bien départager les candidat
Toutefois il manquait de question délicates et le jury aura du mal à départager les très bons candidats qui risquent de tous avoir une note très proche de 20.