Partie II – Energie et trace d'une matrice

1. Si A est une matrice carrée symétrique alors elle est diagonalisable.
Il existe donc une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
Les elts diagonaux de $P^{-1}AP$ sont les valeurs propres de A.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ elle est symétrique donc diagonalisable. Déterminons son spectre.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ λ est valeur propre de A ssi $rg(A - \lambda I_3) \neq 3$

$$rg(A - \lambda I_3) = rg \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= rg \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$= rg \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$= rg \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$= rg \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -2-\lambda+\lambda^2 & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

Dès lors λ est valeur propre de A ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$

cl $Sp(A) = \{-1, 0, 2\}$ donc $\mathcal{E}(A) = |-1| + |0| + |2| = 3$

3.
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def energie(A):
    D = al.eigvals(A)
    S = 0
    n,m = np.shape(A)
    for i in range(n):
        S = S+abs(D[i][i])
    return S
```

4.a) Posons $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice produit $C = AB$.

Par produit ligne par colonne on a pour $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Dès lors $tr(AB) = tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

cl $\left[tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \right]$

4.b) Alors $tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ij}$

quitte à changer les lettres utilisés comme indice,

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = tr(AB)$$

Posons $B = {}^tA = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $b_{ij} = a_{ji}$

Dès lors $tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2$

cl $\left[tr(AB) = tr(BA) \text{ et } tr({}^tAA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ji}^2 \right]$

Si $tr({}^tAA) = 0$ alors la somme de carrés est nulle donc tous les termes sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \; a_{ji} = 0$

cl [si $tr({}^tAA) = 0$ alors A est la matrice nulle]

4.c) Si A et B sont semblables alors il existe une matrice P inversible telle $P^{-1}AP = B$

alors $tr(B) = tr(P^{-1}AP)$

$= tr(APP^{-1})$ } car $tr(AB) = tr(BA)$

$= tr(A)$

cl [si A et B sont semblables alors $tr(A) = tr(B)$]

5.a) Supposons que A est symétrique. A est donc semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

Alors selon 4.c) $tr(A) = tr(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Dès lors, selon l'inégalité triangulaire $|tr(A)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \mathcal{E}(A)$

cl [$|tr(A)| \leq \mathcal{E}(A)$]

5.b) A est semblable à D donc A^2 est semblable à D^2.

selon 4.c) $\left[tr(A^2) = tr(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \right]$

6.a) 3*np.eye(3,3) − np.ones([3,3]) est la matrice

$$A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6.b) • $tr(A) = 2+2+2 = 6$

• $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ donc $tr(A^2) = 6+6+6 = 18$

• Je remarque que A n'est pas inversible car ses colonnes sont liées (leur somme vaut 0). [0 est donc une valeur propre de A]

Posons $0, \lambda, \mu$ les valeurs propres de A (non nécessairement distincts)

on a $tr(A) = 0 + \lambda + \mu$ (selon 5.a))

$tr(A^2) = 0 + \lambda^2 + \mu^2$ (selon 5.b))

donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 6 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 6 - \lambda \\ \lambda^2 + (6-\lambda)^2 = 18 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \mu = 6 - \lambda \\ \lambda^2 + 36 - 12\lambda + \lambda^2 = 18 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \mu = 6 - \lambda \\ 2\lambda^2 - 12\lambda + 18 = 0 \end{cases}$

$\Delta = 144 - 4 \times 2 \times 18 = 0$ donc $\lambda = \frac{12}{2 \times 2} = 3$

On a donc $\lambda = \mu = 3$

cc $\left[Sp(A) = \{0, 3\} \text{ et } \mathcal{E}(A) = 0 + |3| + |3| = 6 \right]$

BILAN

La notion de trace est très classique en mathématiques. Les étudiants de maths approfondies auraient fait cette partie très rapidement car pour eux c'est très classique.

Pour nous c'était plus délicat mais quand même relativement faisable.

Partie II – Produit de Kronecker

7.a)

```
def prod2k(u,v,w,A):
    n,m = np.shape(A):
    B = np.zeros([2*n,2*m])
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            B[i][j] = u*A[i][j]
            B[i][j+n] = v*A[i][j]
            B[i+n][j] = v*A[i][j]
            B[i+n][j+m] = w*A[i][j]
    return B
```

7.b)

```
prod2k(1,-1,2,np.array([[-2,1],[1,-2]]))
```

8.a) $(U*A)Y = \begin{pmatrix} uAY_1 + vAY_2 \\ uAY_1 + wAY_2 \end{pmatrix}$ selon l'énoncé si $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} uaAX + vbAX \\ uaAX + wbAX \end{pmatrix} \quad \text{car } Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$$

$$= \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (ua+wb)X \end{pmatrix} \quad \text{car } AX = \mu X$$

cl $\boxed{(U*A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (ua+wb)X \end{pmatrix}}$

8.b) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de U pour la valeur propre λ.

Donc $U\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$

Soit encore $\begin{cases} ua + vb = \lambda a \\ va + wb = \lambda b \end{cases}$

Selon 8.a) on a donc $(U*A)\,Y = \mu \begin{pmatrix} \lambda a X \\ \lambda b X \end{pmatrix} = \lambda\mu \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$

de plus $X \neq 0$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ (car ce sont des vecteurs propres) donc $Y \neq 0$

cl $\boxed{Y \text{ est un vecteur propre de } U*A \text{ associé à la valeur propre } \lambda\mu}$

9.a) U et A sont symétriques donc diagonalisables.

Il existe donc une base $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituées respectivement de vecteurs propres de U et de A.

9.c) Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ et $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Y_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i Z_i = 0$ (E)

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i a X_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i c X_i \\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b X_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i d X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible puisque $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i X_i = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0$ car $(X_1,\dots,X_n)$ est libre

Cl $\boxed{(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n) \text{ est libre}}$

9.d) $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{card}(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n) = 2n = \dim(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))$

Donc $\mathcal{E} = (Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$

Soit γ_1, γ_2 les valeurs propres de U associées à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

et $\mu_1,\dots,\mu_n$ les valeurs propres de A associées à $X_1,\dots,X_n$

Selon 8.b) pour tt $i \in [\![1,n]\!]$ $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $U * A$ associés aux valeurs propres $\gamma_1 \mu_i$ et $\gamma_2 \mu_j$

Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{E}$ alors $P^{-1}(U*A)P$ est donc la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

$\boxed{\text{Cl } U*A \text{ est semblable à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont } \gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n.}$

9.d) Par définition on a selon 9.c)

$$\mathcal{E}(U*A) = \sum_{i=1}^{n}|\gamma_1\mu_i| + \sum_{i=1}^{n}|\gamma_2\mu_i|$$

$$= |\gamma_1|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i| + |\gamma_2|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|$$

il vient $\mathcal{E}(U*A) = (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\sum_{i=1}^{m} |\mu_i| = \mathcal{E}(U)\times\mathcal{E}(A)$

cl $\boxed{\mathcal{E}(U*A) = \mathcal{E}(U)\times\mathcal{E}(A)}$

10. Dans l'exemple le graphe G_4 a pour matrice d'adjacence

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice d'adjacence de G_8 est $A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $A_8 = U * A_4$ avec

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

cl plus généralement on a $\boxed{A_{2n} = U * A_n \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

10.b) Selon 9d) $\mathcal{E}(A_{2n}) = \mathcal{E}(U)\times\mathcal{E}(A_n)$

Déterminons $\mathcal{E}(U)$ pour cela déterminons le spectre de U.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ λ est valeur propre de U ssi $\det(U - \lambda I_2) = 0$

ssi $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

ssi $(1-\lambda)\times(-\lambda) - 1 = 0$

ssi $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$ donc $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

On a donc $Sp(U) = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \,;\, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Dès lors $\mathcal{E}(U) = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| + \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$

$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= \sqrt{5}$

cl $\boxed{\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\,\mathcal{E}(A_n)}$

BILAN

La question d'informatique n'était pas facile. En dehors de celle il n'y avait pas mal de questions accessibles dans cette partie.
Les questions étaient bien découpées, et on pouvait facilement admettre un résultat pour poursuivre.

Partie III - encadrement de l'énergie

11.a) Si $i \notin I$ ou $j \notin I$ alors i ou j est isolé et alors $a_{ij} = 0$

Les seuls coefficient a_{ij} eventuellement non nuls sont donc ceux pour lesquels $(i,j) \in I^2$.

Dès lors $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{ij}$

Le graphe étant non orienté et sans boucle la somme des coefficients de A est par propriété égale à 2 fois le nombre d'arêtes.

Cl $\left[\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{ij} = 2m \right]$

11.b) • Au minimum chaque sommet non isolé est relié à un seul autre sommet non isolé.

Au minimum il y a donc exactement p coefficients a_{ij} égaux à 1, les autres étant nuls.

On a alors $\sum_{(i,j) \in I^2} a_{ij} = p$

Dès lors $2m \geqslant p$ donc $1 \leq \frac{2m}{p}$

• Au maximum chaque sommet non isolé est relié aux $p-1$ autres.

Il y a donc $p(p-1)$ coefficients a_{ij} égaux à 1 les autres étant égaux à 0.

Dès lors $2m \leq p(p-1)$ donc $\frac{2m}{p} \leq p-1$

Cl $\left[1 \leq \frac{2m}{p} \leq p-1 \right]$

12. a) $G(A)$ est non orienté donc A est symétrique.

A est donc diagonalisable donc il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Si cette matrice était nulle, A serait nulle et tous les points du graphe serait isolé. C'est faux car $p \geqslant 2$.

Cl $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe une matrice P inversible telle que } P^{-1}AP \text{ est une} \\ \text{matrice diagonale non nulle.} \end{array} \right\}$

12.b) A et D sont semblables donc selon 4.c) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D)$

Or $G(A)$ n'a pas de boucle. Les coefficients diagonaux de A sont donc nuls.

Cl $\left[\operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(A) = 0 \right]$

De même A^2 et D^2 sont semblables donc $tr(D^2) = tr(A^2)$

Or selon 4.a) $tr(A^2) = tr(A \times A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} a_{ji}$

$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$ car A est symétrique

Il vient : $tr(D^2) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$

$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}$ car $a_{ij} = 0$ ou 1

$= 2m$ selon 11.a)

cl $\left[tr(D^2) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = 2m \right]$

13.a) Si k est un sommet isolé alors pour $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $a_{ik} = 0$

On a $E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k^{eme}$ ligne

donc $AE_k = 0$ et $E_k \in \ker(A)$

cl (si k est un sommet isolé alors $E_k \in \ker(A)$)

Il y a $n-p$ sommets isolés. $\ker(A)$ contient donc $n-p$ vecteurs de la base canonique. Ces vecteurs forment une famille libre

donc $[\dim(\ker(A)) \geq n-p]$

J'en déduis que 0 apparait au moins $n-p$ fois sur la diagonale de la matrice D.

Les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant rangés dans l'ordre décroissant de leur valeur absolue D est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
$\underbrace{\qquad}_{n-p \text{ fois}}$

cl [si $p < n$ $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$]

13.b) Selon 12.b) $tr(D^2) = 2m$

or selon 13.a) $D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

cl $\left[\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m \right]$

Selon 12.a) $D \neq 0$ donc D a au moins une valeur propre non nulle. Si tous les λ_k étaient négatifs ou nuls, on aurait $tr(D) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k < 0$ c'est absurde car selon 12.b) $tr(D) = 0$

Cl Au moins un des λ_k est strictement positif donc
$\left[\theta = \max_{1 \leq k \leq n} (\lambda_k) > 0 \right]$

Soit $k_0 \in [\![1, p]\!]$ tq $\theta = \lambda_{k_0}$.

On a $2m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = (\lambda_{k_0})^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{p} \lambda_k^2 \geq (\lambda_{k_0})^2 = \theta^2$

donc $\theta^2 \leq 2m$ et $\left(\theta \leq \sqrt{2m} \right)$

Cl $\left[0 < \theta \leq \sqrt{2m} \right]$

13. c) Soit $x_1 \dots x_r$ des réels. On a :

$\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, (x_i - x_j)^2 = x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2 \geq 0$

donc $2x_i x_j \leq x_i^2 + x_j^2$

Alors $\sum_{1 \leq i,j \leq r} 2x_i x_j \leq \sum_{1 \leq i,j \leq r} (x_i^2 + x_j^2)$ (*)

On a
$$\left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right) \left(\sum_{j=1}^{r} x_j \right)$$
$$= \sum_{1 \leq i,j \leq r} x_i x_j$$
selon (*)
$$\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq r} (x_i^2 + x_j)^2$$
$$\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} x_i^2 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} x_j^2 \right)$$
$$\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{r} r x_i^2 + r \sum_{j=1}^{r} x_j \right)$$
$$\leq r \sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

Cl $\left[\text{Si } x_1, \dots, x_r \text{ sont des réels } \left(\sum_{i=1}^{r} x_i \right)^2 \leq r \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \right]$

13.d) Posons à nouveau $k_0 \in [\![1, p]\!]$ tq $\theta = \lambda_{k_0}$

Alors $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k| = |\lambda_{k_0}| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{p} |\lambda_k|$

$\theta > 0$ selon 13.b) donc $|\lambda_{k_0}| = |\theta| = \theta$ et

$$\mathcal{E}(A) = \theta + \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k| \quad (*)$$

De plus selon 13.c) $\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|\right)^2 \leq (p-1) \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} \lambda_k^2$

Enfin $\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 - \lambda_{k_0}^2$

$= 2m - \theta^2$) selon 13.b)

Il vient $\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|^2\right)^2 \leq (p-1)(2m - \theta^2)$

donc $\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|^2 \leq \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$ $(**)$

cl de $(*)$ et $(**)$ on déduit : $\boxed{\mathcal{E}(A) \leq \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}}$

14.a) * On a $P^{-1} = {}^tP$ donc ${}^tPP = I_n$

et $Q = {}^tP$ donc ${}^tQ = P$ et $Q\,{}^tQ = I_n$

cl $\boxed{Q^{-1} = {}^tQ}$

* $P^{-1}AP = D$ donc $A = PDP^{-1}$

or $P^{-1} = {}^tP = Q$ donc $P = Q^{-1} = {}^tQ$

cl $\boxed{A = {}^tQDQ}$

* ${}^tYY = {}^t(QX)\,QX$

$= {}^tX\,{}^tQ\,QX$

$= {}^tX\,I_n\,X$) car $Q^{-1} = {}^tQ$

$= {}^tX\,X$

cl $\boxed{{}^tYY = {}^tXX}$

14.b) ${}^tXAX = {}^tX\,{}^tQDQX$ selon 14.a)

$= {}^t(QX)\,D\,QX$

$= {}^tY\,DY$

Enfin ${}^tYDY = (y_1 \cdots y_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$

$= (y_1 \cdots y_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 y_1\\ \vdots \\ \lambda_n y_n\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$

cl $\boxed{{}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2}$

14.c) * ${}^tYY = (y_1 \cdots y_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$

et ${}^tYY = {}^t(QX)QX = {}^tX\,{}^tQQX = {}^tXX$ car ${}^tQQ = I_n$

donc ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$

* D'autre part $\theta = \max\limits_{1\le k\le n}(\lambda_k)$ donc $\forall k \in [1,n]$ $\lambda_k \le \theta$

Dès lors $\lambda_k y_k^2 \le \theta y_k^2$ pour $\forall k \in [1,n]$

donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \le \sum_{k=1}^{n} \theta y_k^2 = \theta \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \theta\,{}^tYY = \theta\,{}^tXX$

cl $\boxed{{}^tXAX = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2}_{14.b)} \le \theta\,{}^tXX}$

15.a) Soit U la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le $i$ème coefficient vaut 1 si i n'est pas isolé et 0 sinon.

Notons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Alors $AU = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k = \sum_{k\in I} a_{ik} u_k + \underbrace{\sum_{k\notin I} a_{ik} u_k}_{=0}$

$= \sum_{k\in I} a_{ik}$

Puis ${}^tUAU = \alpha$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^{n} u_i c_i$

$= \sum_{i\in I} u_i c_i + \underbrace{\sum_{i\notin I} u_i c_i}_{=0}$

$= \sum_{i\in I} c_i$

$= \sum_{i\in I}\sum_{k\in I} a_{ik}$

cl $\boxed{{}^tUAU = \sum_{(i,j)\in I^2} a_{ij} \underset{11.a)}{=} 2m}$

De plus selon 14.c) ${}^tUAU \le \theta\,{}^tUU$

et ${}^tUU = (u_1 \dots u_n)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = p$ (nbre de points non isolés c'est-à-dire tq $u_i = 1$)

On a donc $2m = {}^tUAU \le \theta\,{}^tUU = \theta p$ donc $\boxed{\frac{2m}{p} \le \theta}$ $(p>0)$

15.b) • $\frac{2m}{p} \geq 1$ selon 11.b) donc $\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{p}} \geq 1$

puis $\frac{\sqrt{2m}}{p} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$ $\Big) \times\sqrt{p}>0$

• $\frac{2m}{p} \leq \theta$ selon 15.a) donc $\frac{\sqrt{2m}\times\sqrt{2m}}{p} \leq \theta$

et $\frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$ $\Big) \div \sqrt{2m}>0$

• $\theta \leq \sqrt{2m}$ selon 13.b) donc $\frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$

cl $\left[\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1 \right]$

16.a) $F : x \mapsto x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ est dérivable sur $[0,1[$ en tant que somme et composée de fct° usuelle ⚠ $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

$\forall x \in [0,1[$ $F'(x) = 1 + \frac{(p-1)(-2x)}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$

$= \frac{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)} - (p-1)2x}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$

$F'(x) > 0 \iff 2\sqrt{(p-1)(1-x^2)} > 2(p-1)x$ $\Big)$ $x \mapsto x^2$ est croissante strict sur $\mathbb{R}^+$ et les termes sont ≥ 0

$\iff 4(p-1)(1-x^2) > 4(p-1)^2 x^2$ $\Big) \div 4(p-1) > 0$ car $p \geq 2$

$\iff 1 - x^2 > (p-1)x^2$

$\iff 1 > p x^2$

$\iff x < \frac{1}{\sqrt{p}}$ $\Big)$ car $x \in [0,1[$

cl $[$ F est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{p}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{p}}, 1]$ $]$

16.b) Selon 13.d) $\mathcal{E}(A) \leq \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$

Avec $\theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)} = \theta + \sqrt{(p-1)2m\left(1-\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)^2\right)}$

$= \theta + \sqrt{2m}\sqrt{(p-1)\left(1-\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)^2\right)}$

$= \sqrt{2m}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}} \sqrt{(p-1)\left(1-\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)^2\right)}\right)$

$= \sqrt{2m}\, F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)$

or selon 15.b) $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{\sqrt{2m}}{p} \leq \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leq 1$ et selon 16.a)

F est décroissante $[\frac{1}{\sqrt{p}} ; 1]$

Il vient $F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right) \leq F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$

donc $\mathcal{E}(A) = \sqrt{2m}\, F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right) \leq \sqrt{2m}\, F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$

cl $\left[\, \mathcal{E}(A) \leq \sqrt{2m}\, F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) \right]$

Enfin $\sqrt{2m}\, F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) = \sqrt{2m}\left(\frac{\sqrt{2m}}{p} + \sqrt{(p-1)\left(1-\frac{2m}{p^2}\right)}\right)$

$$= \frac{2m}{p} + \sqrt{(2m)(p-1)\left(\frac{p^2-2m}{p^2}\right)}$$

$$= \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)}$$

cl $\left[\, \mathcal{E}(A) \leq \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} \right]$ (1)

17.a) $A = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix}$

17.b) $A+I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ toutes les colonnes sont identiques.

On a donc $rg(A+I) = 1 \neq n$ donc -1 est valeur propre de A.
De plus, selon le thme du rang $\dim(\operatorname{Ker}(A-I)) = n-1$

cl $\left[-1 \text{ est valeur propre de A et } \dim(E_{-1}(A)) = n-1 \right]$

17.c) Je pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Je remarque que $X \neq \theta$ et que $AX = (n-1)X$

Donc [$n-1$ est valeur propre de A et X est un vecteur propre associé.]

La somme des dimensions des espaces propres de A ne peut pas dépasser n donc il n'y a pas d'autres valeurs propres.

Dès lors $Sp(A) = \{-1, n-1\}$ avec $\dim(E_{-1}(A)) = n-1$ et $\dim(E_{n-1}(A)) = 1$.

A est donc semblable à $\begin{pmatrix} -1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ (0) & & & n-1 \end{pmatrix}$

Alors $\mathcal{E}(A) = \underbrace{1+\dots+1}_{n-1} + n-1 = 2(n-1)$

cl $\left[\, \mathcal{E}(A) = 2(n-1) \right]$

D'autre part $m = \frac{n(n-1)}{2}$ et $p = n$

donc
$$\frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} = \frac{n(n-1)}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)2\frac{n(n-1)}{2}(n^2-n(n-1))}$$
$$= n-1 + \frac{1}{n}\sqrt{n^2(n-1)^2}$$
$$= n-1 + \frac{n(n-1)}{n}$$
$$= 2(n-1)$$

cl $\left[\text{L'inégalité (1) est une égalité dans ce cas particulier}\right]$

18.

```
def degMax(A):
    n,m=np.shape(A)
    d=0
    for i in range(n):
        S=0
        for j in range(n):
            S=S+A[i][j]      # calcul du degré du sommet i
        if d<S:              # calcul du degré maximum
            d=S
    return d
```

19.a) Soit $j \in \{1,..,p\}$

$$|a_j|(\alpha+\beta) - a_j^2 - \alpha\beta = |a_j|(\alpha+\beta) - |a_j|^2 - \alpha\beta$$
$$= |a_j|(\alpha+\beta-|a_j|) - \alpha\beta$$

or $\alpha = \min\limits_{1\leq k\leq n}(|a_k|)$ donc $\alpha \leq |a_j|$ et $-\alpha\beta \geqslant -\alpha|a_j|$

Il vient : $|a_j|(\alpha+\beta) - a_j^2 - \alpha\beta \geqslant |a_j|(\alpha+\beta-|a_j|) - \alpha|a_j|$
$$\geqslant |a_j|(\beta - |a_j|)$$

Enfin $\beta = \max\limits_{1\leq k\leq n}(|a_k|)$ donc $\beta \geqslant |a_j|$ et $\beta - |a_j| \geqslant 0$

cl $\left[\forall j \in \{1,..,p\}\ \ |a_j|(\alpha+\beta) - a_j^2 - \alpha\beta \geqslant 0 \text{ donc } |a_j|(\alpha+\beta) \geqslant a_j^2 + \alpha\beta\right]$

19.b) $\mathcal{E}(A) = \sum\limits_{j=1}^{p} |a_j|$

donc $(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) = \sum\limits_{j=1}^{p}(\alpha+\beta)|a_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p}(a_j^2+\alpha\beta)$ selon 19.a)

Dès lors $(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} a_j^2 + p\alpha\beta$

Enfin selon 5.b) $tr(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2$ (les autres termes sont nuls)

cl $\boxed{(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \leq tr(A^2) + p\alpha\beta}$

selon 13.b) $tr(A^2) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$

Donc $(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \leq 2m + p\alpha\beta$

cl $\boxed{\mathcal{E}(A) \leq \dfrac{2m+p\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$

19.c) $\varphi : t \mapsto \dfrac{a+bt}{b+t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}+$ comme fraction rationnelle

et $\forall t \in \mathbb{R}+$ $\varphi'(t) = \dfrac{b(b+t)-(a+bt)}{(b+t)^2}$

$$= \frac{b^2+bt-a-bt}{(b+t)^2}$$

$$= \frac{b^2-a}{(b+t)^2} \geqslant 0 \quad \text{car } b^2 \geqslant a$$

Dès lors $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}+}$

19.d) Selon 13.b) $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$

$\beta = \max_{1\leq k \leq n} |\lambda_k|$ donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$ $|\lambda_k| \leq \beta$ puis $\lambda_k^2 \leq \beta^2$

Alors $2m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 \leq \sum_{k=1}^{p} \beta^2 = p\beta^2$

cl $\boxed{2m \leq p\beta^2}$

Selon 19.b) $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m+p\alpha\beta}{\alpha+\beta} = p \cdot \dfrac{\frac{2m}{p}+\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

$= p\,\varphi(\alpha)$ avec $a = \frac{2m}{p}$ et $b = \beta$

on a $a \leq b^2$ car $2m \leq p\beta^2$ donc selon 19.b) φ est croissante sur $\mathbb{R}+$.

Dès lors $\forall \alpha \in \mathbb{R}+$ $\varphi(\alpha) \geqslant \varphi(0) = \dfrac{2m/p}{\beta} = \dfrac{2m}{p\beta}$

puis $\mathcal{E}(A) \geqslant p \cdot \dfrac{2m}{p\beta} = \dfrac{2m}{\beta}$

cl $\boxed{\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{\beta}}$

20.a) X est un vecteur propre de A associé à λ tq $|\lambda|=\rho$

On a donc $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX est donc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ qui est égal à λx_i

Dès lors $\rho|x_i| = |\lambda||x_i| = |\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|$

Selon l'inégalité triangulaire $\rho|x_i| \le \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|}_{\text{les } a_{ij} \text{ sont positifs}}$ $(*)$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$ $|x_j| \le M$ où $M = \max_{1\le j\le n}|x_j|$

donc $a_{ij}|x_j| \le M a_{ij}$

Alors $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \le M \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Enfin $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \deg(i) \le d$ car d est le degré maximum

donc $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \le M.d = d.\max_{1\le j\le n}|x_j|$ $(**)$

Cl selon $(*)$ et $(**)$ on a : $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \rho|x_i| \le d \max_{1\le j\le n}|x_j|}$

20.b) Pour $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\rho|x_i| \le d \max_{1\le j\le n}|x_j|$

donc $\max_{1\le i\le n}(\rho|x_i|) \le d \max_{1\le j\le n}|x_j|$

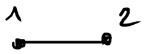
ie $\rho \max_{1\le i\le n}|x_i| \le d \max_{1\le j\le n}|x_j|$

Enfin $X \neq 0$ donc $\max_{1\le i\le n}|x_i| \neq 0$ d'où $\boxed{\rho \le d}$

on a donc $\frac{1}{\rho} \geq \frac{1}{d}$ donc $\frac{2m}{\rho} \geq \frac{2m}{d}$ $(2m>0)$

Cl selon 19.d) $\mathcal{E}(A) \geq \frac{2m}{\rho} \geq \frac{2m}{d}$

De plus $d \le p-1$ car au maximum chaque sommet non isolé est relié aux $p-1$ autres. Donc $\boxed{\mathcal{E}(A) \geq \frac{2m}{d} \geq \frac{2m}{p-1}}$ (2)

20.c) On considère le graphe 

Alors $p = 2$, $m = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de A ssi $\det(A - \lambda I_2) = 0$

ssi $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

ssi $\lambda^2 - 1 = 0$

On a donc $Sp(A) = \{-1, 1\}$

Alors $\mathcal{E}(A) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| = |-1| + |1| = 2$

et $\dfrac{2m}{p-1} = \dfrac{2 \times 1}{2-1} = 2$

cl [Dans ce cas particulier l'inégalité (2) est une égalité.]

BILAN

Cette troisième partie ne comportait pas de grosses difficultés. Les questions s'enchainaient bien et quitte à admettre certains résultats on pouvait avancer loin dans cette partie.

BILAN Général

Sauf erreur c'est la première fois au XXI ème siècle qu'un sujet de parisienne ne comporte pas de probabilités. Le sujet était intéressant, bien construit, avec beaucoup de questions accesibles. La partie II était la plus délicate. Un étudiant sérieux pouvait avancer dans le sujet sans être brillant. La qualité de la note finale sera fonction du nbre de questions traitées.