Exercice 1

1. a) f_n est dérivable sur $[0,1]$ car polynôme.

$\forall x \in [0,1] \quad f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} > 0$

car $x \geqslant 0$

cl $\left[f_n \text{ est strictement croissante sur } [0,1] \right]$

1. b) $f_n(0) = \sum_{k=1}^{n} k . 0^k = 0$ et $f_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k\, 1^k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

f_n est continue (car dérivable) sur $[0,1]$ et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f_n([0,1]) = [0 ; \frac{n(n+1)}{2}]$
1 appartient à l'intervalle d'arrivée donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans $[0,1]$

1.c) $\forall x \in [0,1] \quad f_1(x) = \sum_{k=1}^{1} k x^k = x$

Donc $f_1(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$

cl $[u_1 = 1]$

2. a) Soit $x \in [0,1]$

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k x^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k x^k + (n+1) x^{n+1}$$
$$= f_n(x) + (n+1) x^{n+1}$$

cl $\left[\forall x \in [0,1] \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + (n+1) x^{n+1} \right]$

2. b) Selon 2.a) comme $u_n \in [0,1]$ $\quad f_{n+1}(u_n) = \underbrace{f_n(u_n)}_{=1} + (n+1)(u_n)^{n+1}$

$$= 1 + (n+1)(u_n)^{n+1}$$

$u_n \in [0,1]$ donc $(u_n)^{n+1} \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$

cl $\left[f_{n+1}(u_n) \geqslant 1 \right]$

2. c) On sait, par définition que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$

Selon 2.b) on a donc $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$

Or f_{n+1} est strictement croissante donc $u_n \geqslant u_{n+1}$

cl $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geqslant u_{n+1}$ donc $\left[(u_n)_{n \geqslant 1} \text{ est décroissante} \right]$

2.d) (u_n) est décroissante et minorée par 1.

∴ selon le thme de la limite monotone $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers une limite ℓ.

3.a) $\boxed{\forall x \neq 1 \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$

3.b) Posons pour tt $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ car polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$ ① (le terme en 0 a une dérivée nulle)

Mais selon 3.a) $\quad g(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$g'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \quad ②$$

∴ de ② et ① $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$

3.c) $\forall x \in [0,1[\quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^k = x \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$

$$= x \times \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \quad \} \text{ selon 3.b)}$$

∴ $\boxed{\forall x \in [0,1[\quad f_n(x) = x \times \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$

4.a) $\forall x \in [0,1] \quad f_2(x) = \sum_{k=1}^{2} k x^k = x + 2x^2$

Dès lors $f_2(x) = 1 \iff x + 2x^2 = 1$

$\iff 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2 > 0$ donc l'équation admet deux solutions

$x_1 = \frac{-1-3}{2 \times 2} = -1$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$

x_2 est l'unique solution dans $[0,1]$ donc $\boxed{u_2 = \frac{1}{2}}$

$(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante donc $\forall n\geq 2 \quad u_n \leq u_2 \leq \frac{1}{2}$

et par définition $u_n \in [0,1]$

cl $\boxed{\forall n\geq 2 \quad 0\leq u_n \leq \frac{1}{2}}$

4.b) $\forall n\geq 2 \quad 0\leq u_n \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq (u_n)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $x\mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}+$

$\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc selon le thme de l'encadrement

$\boxed{\lim (u_n)^n = 0}$

De même $\forall n\geq 2 \quad 0\leq n(u_n)^n \leq \frac{n}{2^n}$

$\lim \frac{n}{2^n} = 0$ selon le TCC donc selon le thme de l'encadrement

$\boxed{\lim n(u_n)^n = 0}$

4.c) Par définition $f_n(u_n) = 1$ et si $n\geq 2$ $u_n \leq \frac{1}{2}$ donc $u_n \neq 1$

Dès lors, selon 3.c) pour $n\geq 2$:

$$u_n \times \frac{n(u_n)^{n+1} - (n+1)(u_n)^n + 1}{(1-u_n)^2} = 1 \qquad \big) \times (1-u_n)^2$$

donc $\quad n(u_n)^{n+2} - (n+1)(u_n)^{n+1} + u_n = 1 - 2u_n + (u_n)^2 \qquad \big) -u_n$

puis $\quad n(u_n)^{n+2} - (n+1)(u_n)^{n+1} = 1 - 3u_n + (u_n)^2$

cl $\boxed{\forall n\geq 2 \quad u_n^2 - 3u_n + 1 = n u_n^{n+2} - (n+1)\, u_n^{n+1}}$

4.d) • $\lim u_n = \ell$ donc par opérations $\boxed{\lim u_n^2 - 3u_n + 1 = \ell^2 - 3\ell + 1}$

• selon 4.b) $\lim n u_n^n = 0$

or $n u_n^{n+2} = n u_n^n \times u_n^2$ avec $n u_n^n \to 0$ et $u_n^2 \to \ell^2$

donc $\boxed{\lim n\, u_n^{n+2} = 0}$

De même $(n+1) u_n^{n+1} = \underbrace{n u_n^n}_{\to 0} \times u_n + \underbrace{u_n^n}_{\to 0} \times u_n$

donc $\boxed{\lim (n+1)\, u_n^{n+1} = 0}$

Par passage à la limite dans la relation de 4.c)

$$\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$$

$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$ il y a deux solutions $\ell_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,1]$ donc $\ell \in [0,1]$

ici, clairement $\ell_2 > 1$ et $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $\ell_1 \in [0,1]$

cl $\boxed{\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

BILAN

Un exercice plutôt classique sur les suites implicites. Le découpage des questions était bien fait pour permettre aux candidats d'avancer en laissant des questions.
La qualité de la rédaction sur certaines questions jouera un rôle important dans l'évaluation.

Exercice 2

1. a) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \text{Vect}(M_1, M_2)$

cl [E est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$]

1.b) Selon 1.a) (M_1, M_2) est génératrice de E. De plus M_1 et M_2 sont non colinéaires donc (M_1, M_2) est libre

cl [(M_1, M_2) est une base de E] avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[$\dim(E) = \text{card}(M_1, M_2) = 2$]

2. • les matrices de E sont symétriques donc diagonalisables
• Elles ont deux colonnes identiques donc elles ne sont pas inversibles

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2\times 1 - 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = M(1,3)$

cl [$A \in E$]

4.
```
def matA():
    A = np.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])
    return A
```

5.a) $A \in E$ donc selon 2. A n'est pas inversible

cl [0 est valeur propre de A]

5.b) $rg(A - 5I) = rg \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$= rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & -6 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$

$= rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 15 & -15 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$

Enfin $rg(A-5I) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

cl $rg(A-5I) = 2 \neq 3$ donc $\boxed{A-5I \text{ n'est pas inversible}}$ et $\boxed{5 \text{ est valeur propre de } A}$

De même $rg(A+4I) = rg\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$= rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftarrow L_2/3$

$= rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -12 & -24 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$

$= rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$

cl $rg(A+4I) = 2 \neq 3$ donc $A+4I$ est non inversible.
Donc $\boxed{-4 \text{ est valeur propre de } A}$

5.c) Rmq A admet 3 vp distincts. On sait donc déjà que chaque sous-espace propre est de dimension 1.

- Déterminons $E_0(A)$

$$E_0(A) = \ker(A) = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = \theta\}$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$X \in E_0(A) \iff AX = \theta$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -10y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 = L_1 \end{matrix}$$

Le système est de rang 2 donc il y a une infinité de solutions à $3-2=1$ paramètre disons x

$$X \in E_0(A) \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\}$$

donc $E_0(A) = Vect(U)$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$U \neq 0$ donc $\boxed{(U) \text{ est libre et c'est une base de } E_0(A)}$

De même on trouve comme base de $E_5(A)$ (V) et comme base de $E_{-4}(A)$ (W) avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

U, V et W sont des $\vec{vp}$ de A associés à des VP distincts donc (U, V, W) est libre. De plus card $(U, V, W) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{cl } (U, V, W) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ formée de } \vec{vp} \text{ de } A \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

6. Selon le thme du rang $\dim(\ker(A - 5I)) + rg(A - 5I) = 3$

or selon 5. $\dim(\ker(A - 5I)) = \dim(E_5(A)) = 1$

Dès lors $rg(A - 5I) = 2$. De même $rg(A + 4I) = 2$

cl Les valeurs renvoyées par le script sont $\boxed{r_1 = 2 \text{ et } r_2 = 2}$

7.a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $M(a,b)U = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $U \neq 0$ donc U est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la VP 0.

De même $M(a,b)V = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix} = (2a+b)V$ et $V \neq 0$

donc V est $\vec{vp}$ de $M(a,b)$ associé à la VP $2a+b$.

Enfin $M(a,b)W = \begin{pmatrix} 2a-2b \\ -4a+4b \\ 2a-2b \end{pmatrix} = (2a-2b)W$ et $W \neq 0$

donc W est $\vec{vp}$ de $M(a,b)$ associé à la VP $2a-2b$

cl $\boxed{U, V \text{ et } W \text{ sont des } \vec{vp} \text{ de toute matrice de } E}$

7.b) Si $P = \begin{array}{c} \begin{matrix} U & V & W \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ P est la matrice de passage de la base canonique à la base (U, V, W)

selon la formule de chgt de base $P^{-1}M(a,b)P = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2b \end{pmatrix}$

on montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ $M(a,b)^n = PD^nP^{-1}$

on calcule P^{-1}, $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & (2a+b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2a-b)^n \end{pmatrix}$ puis PD^nP^{-1}

0 si $n \neq 0$

7.c)
```
def puissance_M(a,b,n):
    P=np.array([[1,1,1],[0,1,-2],[-1,1,1]])
    Pinv = al.inv(P)
    D=np.array([[0,0,0],[0,(2*a+b)**n,0][0,0,(2*a-2*b)**n]])
    return np.dot(np.dot(P,D),Pinv)
```

Rmq c'est nul de ne pas avoir rappelé la syntaxe des instruct° utiles !

BILAN Exercice dont le début est classique même si les questions sont parfois bizarrement posées.
Cela se complique dans 7.

Exercice 3

1. • f_n est positive sur $\mathbb{R}$

- c'est clair sur $]-\infty,0[\cup]n,+\infty[$ car elle est nulle
- c'est le cas sur $[0,n]$ car si $x\in[0,n]$ alors $\frac{x}{n}\leq 1$ donc $1-\frac{x}{n}\geqslant 0$ puis $\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\geqslant 0$

• f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et n

- elle est nulle sur $]-\infty,0[\cup]n,+\infty[$
- elle est polynôme sur $[0,n]$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ cvge et vaut 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt + \int_n^{+\infty} 0\,dt$$

$$= -n\int_0^n \underbrace{-\frac{1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}}_{u'u^{n-1}}dt$$

$$= -n\left[\frac{(1-t/n)^n}{n}\right]_0^n$$

$$= -\left(1-\frac{n}{n}\right)^n+\left(1-\frac{0}{n}\right)^n$$

$$=1$$

cl des trois points $\boxed{f_n \text{ est une densité de probabilité}}$

2. a) $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)f_n(t)\,dt$ converge absolument (thme de transfert)

• Existence

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|1-\frac{t}{n}\right| f_n(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt}_{I_2} + \underbrace{\int_n^{+\infty} 0\,dt}_{I_3}$$

car $1-\frac{t}{n}\geqslant 0$ sur $[0,n]$

I_1 converge et vaut 0

I_3 converge et vaut 0

I_2 est l'intégrale d'une fct° continue sur un segment donc cvge.

cl $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)f_n(t)\,dt$ cvge absolument donc $\boxed{E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) \text{ existe}}$

• Calcul

Selon le pt précédent $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$

$$= -n\int_0^n -\frac{1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$= -n\left[\frac{(1-t/n)^{n+1}}{n+1}\right]_0^n$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^2 f_n(t)\,dt$ converge absolument (thme de transfert)

L'existence se démontre comme pour $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)$

puis $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)=\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^2\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}dt$

$$= -n\int_0^n -\frac{1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}dt$$

$$= -n\left[\frac{(1-t/n)^{n+1}}{n+2}\right]_0^n$$

$$= \frac{n}{n+2}$$

cc $\left[E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)\right.$ et $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existent ; $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$ et $\left.E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)=\frac{n}{n+2}\right)$

2.b) • $X_n = n\cdot\frac{X_n}{n} = -n\left(1-\frac{X_n}{n}-1\right) = -n\left(1-\frac{X_n}{n}\right)+n$

et $1-\frac{X_n}{n}$ admet une espérance donc par linéarité X_n admet une espérance et $E(X_n) = -nE\left(1-\frac{X_n}{n}\right)+n = -n\cdot\frac{n}{n+1}+n = n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}$

• $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2 = 1-2\frac{X_n}{n}+\frac{X_n^2}{n^2}$

donc $X_n^2 = n^2\left[\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2+2\frac{X_n}{n}-1\right]$

or X_n et $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2$ admettent une espérance donc par linéarité X_n^2 admet une espérance et

$$E(X_n^2) = n^2\left(E\left[\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right]+\frac{2}{n}E(X_n)-1\right)$$

$$= n^2\left(\frac{n}{n+2}+\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{n+1}-1\right)$$

$$= n^2\left(\frac{n}{n+2}+\frac{2}{n+1}-1\right)$$

$$= n^2\left(\frac{n(n+1)+2(n+2)-(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{2n^2}{(n+1)(n+2)}$$

Selon Koënig-Huygens X_n admet une variance et

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$
$$= \frac{2n^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$
$$= \frac{2n^2(n+1) - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$= \frac{n^3}{(n+1)^2(n+2)}$$

cl X_n admet une espérance et une variance et

$$\left[E(X_n) = \frac{n}{n+1} \quad \text{et} \quad V(X_n) = \frac{n^3}{(n+1)^2(n+2)} \right]$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$

- si $x<0$ $\quad F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$
- si $x \in [0,n]$ $\quad F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{x} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$

$$= -n\left[\frac{(1-t/n)^n}{n}\right]_0^x$$
$$= 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

- si $x>n$ $\quad F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \underbrace{\int_0^{1} \left(1-t/n\right)^{n-1} dt}_{=1 \text{ selon } 1} + \int_n^{x} 0\,dt$

$$=1$$

cl
$$\left[F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x>n \end{cases} \right]$$

4.a) [Si $x<0$ $\quad F_n(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$]

4.b) Soit $x \in [0,+\infty[$ $\quad n \geq \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq n-1$

Or on sait que $x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ donc $x \leq n$

D'après 3 [Si $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$ alors $F_n(x) = 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$]

4. c) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$ car $-\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

cl [$\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$]

4.d) Selon 4.b) <u>Si $x \geq 0$</u> alors pour $\forall\, n \geq \lfloor x \rfloor + 1$

$$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
$$= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$$

Par composée, selon 4.c) $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \underline{1 - e^{-x}}$

Selon 4.a) <u>si $x < 0$</u> $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \underline{0}$

Cl $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\left[(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ ou } X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\right]$

5.a) Selon le cours $\left[G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \right]$

5.b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(Z_n > x) = P(n M_n > x)$

$$= P\left(\min(U_1, \dots, U_n) > \frac{x}{n}\right)$$
$$= P\left(\left(U_1 > \frac{x}{n}\right) \cap \dots \cap \left(U_n > \frac{x}{n}\right)\right)$$
$$= P\left(U_1 > \frac{x}{n}\right) \dots P\left(U_n > \frac{x}{n}\right) \quad \text{) indépendance}$$
$$= \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \quad \text{) les } U_i \text{ suivent } \mathcal{U}([0,1])$$

Cl $\left[\forall x \in \mathbb{R} \quad P(Z_n > x) = \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n\right.$

Dès lors $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = 1 - P(Z_n > x) = 1 - \left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$

Selon 5.a) $G\left(\frac{x}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x/n < 0 \\ x/n & \text{si } \frac{x}{n} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } \frac{x}{n} > 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/n & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Cl $\left[F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases} \right]$

5.c) X_n et Z_n ont la même fonct de répartition donc elles suivent la même loi.

5.d)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simul_X(n):
    U = rd.random(size = n)
    M = np.min(U)
    Z = nM
    return Z
```

BILAN

Les calculs d'intégrales des questions 1 et 2 n'étaient pas évidents et auront pu être pénalisants.

Les questions étaient plutôt classiques mais je trouve cet exercice un peu plus difficile que les précédents

Problème

1.

```
def varX(n):
    k = rd.randint(1,n+2)
    if k==n+1 :
        X=0     # on obtient jamais de blanche
    elif k==1:
        X=1     # on obtient une blanche au 1er tirage
    else:
        X=1
        while rd.randint(1,n+1) <= k-1 :   # tirer une noire
            X=X+1
    return X
```

2. Le choix de l'urne se fait uniformément dans $[\![1,n+1]\!]$

d'où $\boxed{\forall k\in[\![1,n+1]\!] \quad P(U_k)=\frac{1}{n+1}}$

3.a) Si $k\in[\![1,n]\!]$ et si U_k est réalisé, il y a $k-1$ boules noires dans U_k et $n-(k-1)=n+1-k$ boules blanches.

X_n est le temps d'attente d'un premier succès de l'événement "tirer une blanche" de probabilité $\frac{n+1-k}{n}$ lors de tentatives identiques et indépendantes.

d'où conditionnellement à U_k, $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n+1-k}{n}\right)}$

3.b)

```
    else :
        X = rd.geometric((n+1-k)/n)
    return X
```

4.a) U_{n+1} contient n boules noires donc $\boxed{P_{U_{n+1}}(X_n=1)=0}$

4.b) Selon 3.a) si $k\in[\![1,n]\!]$ $\boxed{P_{U_k}(X_n=1)=\frac{n+1-k}{n}}$

4.c) Les évts U_k $1\leq k\leq n+1$ forment un système complet d'évts.

Selon la FPT

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n+1} P(U_k)\,P_{U_k}(X_n=1)$$

$$=P(U_{n+1})P_{U_{n+1}}(X_n=1)+\sum_{k=1}^{n} P(U_k)P_{U_k}(X_n=1)$$

Selon 4.a), 4.b) et 2.

$$\mathbb{P}(X_n=1) = \frac{1}{n+1}\times 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1-k}{n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i \qquad i = n+1-k$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

d'où $\left[\mathbb{P}(X_n=1) = \frac{1}{2}\right]$

5.a) Si U_{n+1} est réalisé l'urne contient n boules noires donc $\left[\mathbb{P}_{U_{n+1}}(X_n=j) = 0 \text{ pour } \forall j\geq 2\right]$

5.b) Selon 3.a) si $k\in [\![1,n]\!]$,

$$\forall j\geq 2 \qquad \mathbb{P}_{U_k}(X_n=j) = \left(1-\frac{n+1-k}{n}\right)^{j-1}\frac{n+1-k}{n}$$

$$= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j}\frac{n+1-k}{n}$$

d'où $\left[\forall k\in [\![1,n]\!] \ \forall j\geq 2 \ \mathbb{P}_{U_k}(X_n=j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j}\frac{n+1-k}{n}\right]$

5.c) Comme en 4.c)

$$\forall j\geq 2 \qquad \mathbb{P}(X_n=j) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(U_k)\,\mathbb{P}_{U_k}(X_n=j)$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\frac{n+1-k}{n}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{\ell}{n}\right)^{j-1}\times\frac{n-\ell}{n} \qquad \ell = k-1 \text{ donc } k = \ell+1$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\left(\frac{\ell}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{\ell}{n}\right)^{j}\right)$$

d'où $\left[\forall j\geq 2 \ \mathbb{P}(X_n=j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right)\right]$

6.a) Soit $k\in [\![0,n-1]\!]$ alors $\left|\frac{k}{n}\right|<1$ donc la série $\sum_{j\geq 1}\left(\frac{k}{n}\right)^j$ converge (série géométrique) et $\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^j = \left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{n}}$

Par chgt d'indice $\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{i} = \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{1-k/n}$

Dès lors, $\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]=\frac{k}{n}\frac{1}{1-\frac{k}{n}}-\left(\frac{k}{n}\right)^{2}\frac{1}{1-\frac{k}{n}}$

$$=\frac{k}{n}\frac{1}{1-\frac{k}{n}}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

cl $\left[\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad \sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]=\frac{k}{n}\right]$

Rmq on aurait aussi pu voir une série télescopique

6.a) $(X_n\geqslant 2)=\bigcup_{j=2}^{+\infty}(X_n=j)$

donc $P(X_n\geqslant 2)=\sum_{j=2}^{+\infty}P(X_n=j)$) évts incompatibles

$$=\sum_{j=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$ selon 5.c)

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$ interversion des sommes

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}$$ selon 6.a)

$$=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}k$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n-1}{2(n+1)}$$

cl $\left[P(X_n\geqslant 2)=\frac{n-1}{2(n+1)}\right]$

7.a) $X_n(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n\geqslant 2)=1$

Dès lors $P(X_n=0)=1-P(X_n=1)-P(X_n\geqslant 2)$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2(n+1)}$$) selon 6.b) et 4.c)

$$=\frac{n+1-(n-1)}{2(n+1)}$$

cl $\left[P(X_n=0)=\frac{1}{n+1}\right]$

7.b) c'est logique : c'est la probabilité de choisir l'urne U_{n+1} qui ne contient aucune blanche

8.a) X_n admet une espérance si la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} j\,P(X_n=j)$ est absolument convergente.

La série est ATP donc il suffit de montrer la convergence.

Posons $S_N = \sum_{j=0}^{N} j P(X_n=j)$

$$= 0 + P(X_n=1) + \sum_{j=2}^{N} j P(X_n=j)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{N} j \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - j\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \frac{k}{n} \sum_{j=2}^{N} j \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\right]$$

$\left|\frac{k}{n}\right| < 1$ lorsque $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=2}^{N-1} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} = \sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{terme} \\ \text{en } 1}}{- 1}$$

Dès lors $\lim_{N\to+\infty} S_N$ existe donc $\boxed{X_n \text{ admet une espérance}}$

et $$E(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg[\underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2} - 1 - \frac{k}{n}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2} - 1\right)}_{A_k} \Bigg]$$

avec $$A_k = \left(\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2} - 1\right)\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\frac{k}{n}} - \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{n-k} - \frac{n-k}{n}$$

Dès lors $$E(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n}{n-k} - \frac{n-k}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \qquad \Big\downarrow\ i = n-k$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{X_n \text{ admet une espérance et } E(X_n) = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}$

Le calcul était tout à fait déraisonnable ! Je suis curieux de savoir combien de candidats l'auront mené à bien ...

8.b)

```
v = np.arange(1,n+1)
E = n/(n+1)*np.sum(1/v)
print(E)
```

9.a) Si $t \in [p, p+1]$ alors $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$

en intégrant terme à terme (les bornes sont dans le bon sens)

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,dt$$

puis $$\frac{1}{p+1}\int_p^{p+1} 1\,dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{p}\int_p^{p+1} 1\,dt$$

avec $\int_p^{p+1} 1\,dt = [t]_p^{p+1} = 1$

Cl $\left[\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{p}\right]$

9.b) En additionnant termes à termes, pour $n \geq 2$

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

puis $$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$) chasles et $i = p+1$

Enfin $\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = [\ln(|t|)]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$

Cl $\left[\forall n \geq 2 \quad \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}\right]$

9.c) Soit $n \geq 2$.

- $\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n)$ donc $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - 1 \leq \ln(n)$

  puis $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$ (*)

- $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \geq \ln(n)$ donc $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \geq \ln(n)$

  puis $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$ (**)

Cl $\left[\forall n \geq 2 \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1\right]$

9.d) Selon 9.c) $\forall n \geqslant 2 \quad \dfrac{\ln(n)+1/n}{\ln(n)} \leq \dfrac{\sum_{p=1}^{n} 1/p}{\ln(n)} \leq \dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)}$

$\lim \dfrac{\ln(n)+1/n}{\ln(n)} = \lim 1 + \dfrac{1/n}{\ln(n)} = 1$ et $\lim \dfrac{\ln(n)+1}{\ln(n)} = \lim 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} = 1$

$\underline{\underline{\text{d}}}$ selon le thme d'encadrement $\lim \dfrac{\sum_{p=1}^{n} 1/p}{\ln(n)} = 1$

Dès lors $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Enfin $E(X_n) = \dfrac{n}{n+1} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ avec $\dfrac{n}{n+1} \sim \dfrac{n}{n} = 1$ car $1 = o(n)$

$\underline{\underline{\text{d}}}$ $\boxed{E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$

BILAN

cet exercice était difficile.
Les question d'informatique étaient accessibles. Ensuite il fallait bien comprendre l'expérience. Les candidats qui n'auront pas reconnu la loi géométrique en 3.a) n'auront pas pu faire grand chose.

On pouvait grater des points avec la très classique comparaison série/intégrale de la question 9.

BILAN GLOBAL

Les deux premiers exercices étaient accessibles ; le reste, plus délicat, sera sélectif. Les étudiants qui auront réussi une partie significative du problème auront une excellente note.