Partie I. Des résultats généraux

1. Posons $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) = e^t - 1 - t$ et $\forall t \in]-1, +\infty[$ $h(t) = \ln(1+t) - t$

g et h sont dérivables sur leurs domaines de définition comme opération sur des fct° usuelles dérivables.

$\forall t \in \mathbb{R}$ $g'(t) = e^t - 1$ et $h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$

Il vient

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	

et

t	-1		0		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	$h(0)$	$\searrow$	

Enfin $g(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ et $h(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $g(t) \geq 0$ et $\forall t > -1$ $h(t) \leq 0$

cl $[\forall t \in \mathbb{R}$ $e^t \leq 1+t$ et $\forall t > -1$ $\ln(1+t) \leq t]$

Rmq on aurait aussi pu remarquer que $t \mapsto e^t$ est convexe $t \mapsto \ln(1+t)$ concave puis remarquer que $y = 1+t$ et $y = t$ sont des équations de tangentes.

2. a) • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme opération sur des fonctions usuelles dérivables

$\forall t \in [0,1]$, $f'(t) = e^{-t} - (1+t)e^{-t} - 1$
$= -te^{-t} - 1 < 0$

• $f(0) = 1$ et $f(1) = 2e^{-1} - 1 = \frac{2}{e} - 1 = \frac{2-e}{e} < 0$ car $e \simeq 2{,}7$

cl f est continue (car dérivable) sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$. Donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = [\frac{2-e}{e}, 1]$

0 appartient à $]\frac{2-e}{e}; 1[$

donc [il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tq $f(\alpha) = 0$]

On a donc

t	0		α		1
$f(t)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{2-e}{e}$

Donc $[\forall t \in [0,1]$ $t < \alpha \Leftrightarrow f(t) < 0]$

2. b)

```
def f(t):
    return (1+t)*np.exp(-t) - t
```

```
def approx():
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0 :
            b=c
        else :
            a=c
    return a
```

2.a) Selon 1. $\forall t\in[0,1]\quad e^t \leq 1+t \leq 1+2t$ (car $t\geq 0$ donc $t\leq 2t$)

Alors $f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right) = \left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)e^{-1/\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt2}$

or $\frac{1}{\sqrt2}\in[0,1]$ donc $e^{1/\sqrt2} \leq 1+2\cdot\frac{1}{\sqrt2} = 1+\sqrt2$) inverse

donc $e^{-1/\sqrt2} \geqslant \frac{1}{1+\sqrt2}$

puis $\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)e^{-1/\sqrt2} \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)\frac{1}{1+\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}$) $-\frac{1}{\sqrt2}$

enfin $\left(1+\frac{1}{\sqrt2}\right)e^{-1/\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt2} \geqslant 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)\geqslant 0$ donc selon 1.b) $\frac{1}{\sqrt2}\leq\alpha$

cl $\left[\alpha\geqslant\frac{1}{\sqrt2}\right]$

3.a)

```
def minimum(x,p):
    S = 1    # pour calculer sum_{i=0}^{k} p^i/i!
    f = 1    # pour calculer k!
    k = 0
    while x> S*np.exp(-p):
        k=k+1
        f=f*k
        S = S+ p**k/f
    return k

def simulY(p):
    U = random()        # loi uniforme sur [0,1[
    return minimum(X,p)
```

⚠ il faut supposer $k\geqslant 1$

3.b) La suite $\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{p^i}{i!}e^{-p}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Dès lors,

Pour $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $(Y=k)$ signifie que : $\left(U>\sum_{i=0}^{k-1}\frac{p^i}{i!}e^{-p}\right)$ et $\left(U\leq\sum_{i=0}^{k}\frac{p^i}{i!}e^{-p}\right)$

⚠

Dès lors $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}e^{-p} < U \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}e^{-p}\right)$

$$= F_U\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}e^{-p}\right) - F_U\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}e^{-p}\right)$$

Les termes de la somme sont positifs donc pour $\forall k$:

$$0 \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}e^{p} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{p^i}{i!}e^{-p} = e^{p}.e^{-p} = 1$$

or $F_U(x) = x$ sur $[0,1]$

Il vient $\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}e^{-p} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}e^{-p} = e^{-p}\frac{p^k}{k!}$ pour $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Enfin $P(Y=0) = \mathbb{P}\left(U \leq \sum_{i=0}^{0} \frac{p^i}{i!}e^{-p}\right) = F_U(e^{-p}) = e^{-p}$

$\underline{\underline{cl}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(Y=k) = e^{-p}\frac{p^k}{k!}$ donc $[Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p)]$

3.c) Soit $k \geq 2$. Si $(Y=k)$ alors $U \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}e^{-p}$ et $U > \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}e^{-p}$

or $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}e^{-p} \geq \underbrace{(1+p)}_{\text{terme en 0 et 1}}e^{-p} = (1+p)e^{-p} - p + p = f(p) + p = \beta + p$

donc $[U > \beta + p]$

or $(X=0)$ lorsque $U \notin]\beta, \beta+p]$ donc ici $(X=0)$

$\underline{\underline{cl}}$ [si $k \geq 2$ et $(Y=k)$ alors $(X=0)$]

On a $(Y=k) \subset (X=0)$ donc $(Y=k) \cap (X=0) = (Y=k)$

$\underline{\underline{cl}}$ $\left[\forall k \geq 2 \quad \mathbb{P}((Y=k) \cap (X=0)) = \mathbb{P}(Y=k) = \frac{p^k}{k!}e^{-p}\right]$

3. d) $(Y=1)$ $\underline{\underline{ssi}}$ $U \leq \sum_{i=0}^{1} \frac{p^i}{i!}e^{-p} = (1+p)e^{-p}$ et $U > \sum_{i=0}^{0} \frac{p^i}{i!}e^{-p} = e^{-p}$

$\underline{\underline{ssi}}$ $e^{-p} < U \leq \beta + p$

or $\beta = f(p) = (1+p)e^{-p} - p = e^{-p} + p\underbrace{(e^{-p} - 1)}_{\leq 0} \leq e^{-p}$

donc si $(Y=1)$ alors $(\beta < U \leq \beta + p)$ donc $(X=1)$

$\underline{\underline{cl}}$ $[(X=0) \cap (Y=1) = \phi]$

Les evts $(X=0)$ et $(X=1)$ forment un SCE donc selon la FPT

$$P(Y=1) = \underbrace{\mathbb{P}((X=0) \cap (Y=1))}_{=0} + P((X=1) \cap (Y=1))$$

Il vient $[\mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1)) = \mathbb{P}(Y=1) = p\,e^{-p}]$

Les évts $(Y=k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un SCE

donc $P(X=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=0)\cap(Y=k))$

$$= \mathbb{P}((X=0)\cap(Y=0)) + \underbrace{P((X=0)\cap(Y=1))}_{=0} + \sum_{k=2}^{+\infty} P((X=0)\cap(Y=k))$$

il vient $P((X=0)\cap(Y=0)) = P(X=0) - \sum_{k=2}^{+\infty} P((X=0)\cap(Y=k))$

$$= P(X=0) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} e^{-p}$$

$$= P(X=0) - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p^k}{k!} - 1 - p\right) e^{-p}$$

$$= P(X=0) - (e^{p} - 1 - p)e^{-p}$$

$$= P(X=0) - 1 + (1+p)e^{-p}$$

Enfin $P(X=1) = P(\beta < U \leq \beta + p)$

$$= F_U(\beta+p) - F_U(\beta)$$

$$= \beta + p - \beta = p$$

donc $P(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X=1) = 1 - p$

Dès lors $\left[P((X=0)\cap(Y=0)) = 1 - p - 1 + (1+p)e^{-p} = f(p) = \beta \right]$

De même $P(X=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=1)\cap(Y=k))$

$$= \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=0)) + \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1))$$

car si $k \geq 2$ $(Y=k)\cap(X=1) = \emptyset$ selon 3.c)

Donc $\left[P((X=1)\cap(Y=0)) = \mathbb{P}(X=1) - P((X=1)\cap(Y=1)) \right.$

$$\left. = p - pe^{-p} = p(1-e^{-p}) \right]$$

cl $\left[\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1)) = pe^{-p} \; ; \; P((X=0)\cap(Y=0)) = \beta \text{ et } P((X=1)\cap(Y=0)) = p(1-e^{-p}) \right]$

3.e) $P(X\neq Y) = 1 - P(X=Y)$

Selon la FPT appliquée au SCE $\{(X=0),(X=1)\}$ on a :

$$P(X=Y) = \mathbb{P}((X=0)\cap(X=Y)) + P((X=1)\cap(X=Y))$$

$$= \mathbb{P}((X=0)\cap(Y=0)) + \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1))$$

$$= \beta + pe^{-p} \qquad \text{selon 3.d)}$$

$$= (1+p)e^{-p} - p + pe^{-p}$$

$$= (1+2p)e^{-p} - p$$

Dès lors $P(X\neq Y) = 1 - (1+2p)e^{-p} + p$

cl $\left[P(X\neq Y) = 1 + p - (1+2p)e^{-p} \right]$

Selon 1, $e^{-p} \geq 1-p$ donc $(1+2p)e^{-p} \geq (1+2p)(1-p)$

puis $-(1+2p)e^{-p} \leq -(1+2p)(1-p)$

alors $1+p-(1+2p)e^{-p} \leq 1+p-(1+2p-p-2p^2)$

Il vient $\left[P(X \neq Y) \leq 2p^2 \right]$

4.a) $T = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{B_i}$. Donc $(T \geq 1)$ ssi au moins un des $\mathbb{1}_{B_i}$ vaut 1

ssi au moins un des B_i est réalisé

cl $\left[(T \geq 1) = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right.$ donc $\left. P(T \geq 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \right]$

4.b) T est une variable aléatoire à valeurs positives (car $T(\Omega) = [\![1,k]\!]$)

T est à support fini donc admet une espérance.

Selon l'inégalité de Markov $\forall a > 0$ $P(T \geq a) \leq \frac{E(T)}{a}$

En particulier pour $a = 1$ $P(T \geq 1) \leq E(T)$

Enfin $E(T) = \sum_{i=1}^{k} E(\mathbb{1}_{B_i})$ (linéarité)

$= \sum_{i=1}^{k} P(B_i)$ car $\mathbb{1}_{B_i} \hookrightarrow \mathcal{B}(P(B_i))$

cl $P(T \geq 1) \leq \sum_{i=1}^{k} P(B_i)$ donc selon 4.a) $\left[P\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \right]$

5.a) $\forall k \in \mathbb{N}$ $|P(X=k) - P(Y=k)| \leq |P(X=k)| + |P(Y=k)|$ (inégalité triangulaire)

$\leq P(X=k) + P(Y=k)$ (termes positifs)

- les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(X=k)$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(Y=k)$ convergent donc $\sum (P(X=k) + P(Y=k))$ converge.
- les séries sont ATP

cl [selon le thm de comparaison la série définissant $S(X,Y)$ est convergente]

5.b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tq $P(X=k) \geq P(Y=k)$

Alors $|P(X=k) - P(Y=k)| = P(X=k) - P(Y=k)$

Or $P((X=k) \cap (Y \neq k)) = P(X=k) + P(Y \neq k) - P((X=k) \cup (Y \neq k))$

$= P(X=k) + 1 - P(Y=k) - P((X=k) \cap (Y \neq k))$

donc $P((X=k) \cap (Y \neq k)) = P(X=k) - P(Y=k) + \underbrace{1 - P((X=k) \cup (Y \neq k))}_{\geq 0}$

Il vient $\quad P((X=k)\cap(Y\neq k)) \geq P(X=k) - P(Y=k) = |P(X=k) - P(Y=k)|$

cl $\left[\text{Si } \quad P(X=k) \geq P(Y=k) \quad \text{alors} \quad |P(X=k) - P(Y=k)| \leq P((X=k)\cap(Y\neq k))\right]$

5.c) Pour des raisons évidentes de symétrie :

Si $\quad P(X=k) \leq P(Y=k) \quad$ alors $\quad |P(X=k) - P(Y=k)| \leq P((X\neq k)\cap(Y=k))$

Dès lors dans tous les cas :

$$\left[\forall k\in\mathbb{N} \quad |P(X=k) - P(Y=k)| \leq P((X=k)\cap(Y\neq k)) + P((X\neq k)\cap(Y=k))\right]$$

5.d) Les évts $(X=k)$ forment un SCE donc selon la FPT

$$P(X\neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(X\neq Y))$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y\neq k))$$

de même avec le SCE $\{(Y=k), k\in\mathbb{N}\}$

$$P(X\neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X\neq k)\cap(Y=k))$$

En additionnant terme à terme dans l'inégalité 5.c) (licite car les séries convergent) :

$$\delta(X,Y) \leq P(X\neq Y) + P(X\neq Y)$$

cl $\left[\delta(X\neq Y) \leq 2\,P(X\neq Y) = 2d(X,Y) \leq 2\right]$ car $P(X\neq Y) \leq 1$

BILAN

Cette première partie était bien progressive. Les premières questions étaient très accessibles (questions 1 et 2). Cela se corsait ensuite mais il y avait quand même pas mal de points à aller chercher.

Partie 2 – Une inégalité

6. S'il existe un entier $k \in [\![1,n]\!]$ tq $p_k \geqslant \alpha$

alors selon 2.c) $p_k \geqslant \alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

donc $p_k^2 \geqslant \frac{1}{2}$

Alors $\sum_{i=1}^{m} p_i^2 \geqslant \frac{1}{2}$ car tous les autres termes sont positifs.

Dès lors $4 \sum_{i=1}^{m} p_i^2 \geqslant 2$

or selon I.5.d) $\delta(S_n, T_n) \leqslant 2$

cl $\boxed{\text{Si l'un au moins des } p_k \text{ est supérieur ou égal à } \alpha \text{ alors } \delta(S_m,T_n) \leqslant 4 \sum_{k=1}^{m} p_k^2 \text{ donc (LC) est vérifiée}}$

7. $X_1, \dots, X_n$ sont des fonctions de $U_1, \dots, U_n$ qui sont mutuellement indépendants

cl selon le lemme de coalition [$X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants]

Il en va de même pour $Y_1, \dots, Y_n$.

8. Selon 3.b) $Y_k \hookrightarrow \mathcal{P}(p_k)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ où les Y_k sont indépendants.

cl par stabilité des lois de Poisson [$T_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{m} p_k) = \mathcal{P}(\lambda)$]

Si $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $p_k = \frac{\lambda}{n}$ alors $X_k = \mathbb{1}_{\beta < U_k \leq \beta + p_k} \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{\lambda}{n})$

De plus $S_n = \sum_{k=1}^{m} X_k$ et les X_k sont indépendants.

cl par stabilité des lois binomiales [$S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$]

D'après le cours (loi des événements rares) [$S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$]

9.a) Si $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $X_k = Y_k$ alors $S_n = T_n$

Dès lors, par contraposée, $S_n \neq T_n \Rightarrow \exists k \in [\![1,n]\!]$ tq $X_k \neq Y_k$

cl [$(S_n \neq T_n) \subset \bigcup_{k=1}^{m} (X_k \neq Y_k)$]

9.b) Selon 5.d) $\delta(S_n,T_n) \leq 2d(S_n,T_n)$ pour tt $n \in \mathbb{N}^*$

or $d(S_n,T_n) = P(S_n \neq T_n)$

De plus, selon 5.a) $P(S_n \neq T_n) \leq P(\bigcup_{k=1}^{m} (X_k \neq Y_k))$

$\leq \sum_{k=1}^{m} P(X_k \neq Y_k)$ } 4.b)

Enfin, selon 3.e) $\mathbb{P}(X_k \neq Y_k) \leq 2p_k^2$

Il vient $\delta(S_m, T_m) \leq 2 \sum_{k=1}^{m} 2p_k^2$

cc $\boxed{\delta(S_m, T_m) \leq 4 \sum_{k=1}^{m} p_k^2}$ pour $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$

10. Si les p_k sont tous égaux à $\frac{\lambda}{n}$ alors selon 8. $S_m \hookrightarrow \mathcal{B}(m, \frac{\lambda}{m})$ et selon 7. $T_m \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Dès lors,

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \delta(S_m, T_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(S_m = k) - \mathbb{P}(T_m = k)|$$

car $\mathbb{P}(S_m = k) = 0$ lorsque $k > m$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left| \binom{m}{k}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$$

D'autre part $4 \sum_{k=1}^{m} p_k^2 = 4 \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 = 4\left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 \times n = \frac{4\lambda^2}{m}$

Dès lors $\sum_{k=0}^{m} \left| \binom{m}{k}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k} \leq \frac{4\lambda^2}{m}$ selon 9.b)

puis $\sum_{k=0}^{m} \left| \binom{m}{k}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| \leq \frac{4\lambda^2}{m} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k} \leq \frac{4\lambda^2}{m}$

cc $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{m} \left| \binom{m}{k}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \right| \leq \frac{4\lambda^2}{m}}$

11.a) On pose pour $\forall k \in [\![1, m]\!]$ $p_k = \frac{1}{m+k}$ et on définit X_k et Y_k comme dans le préambule de la partie II.

on a donc $\lambda = \sum_{k=1}^{m} p_k = s_m$

X_k correspond au succès de la kème épreuve de Bernoulli avec probabilité de succès égale à $\frac{1}{m+k}$

et $S_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$ est le nombre de succès.

Selon 8. $T_m = \sum_{k=1}^{m} Y_k \hookrightarrow \mathcal{P}(s_m)$

Dès lors $\left[\left| \mathbb{P}(S_m = k) - \frac{s_m^k}{k!} e^{-s_m} \right| = |\mathbb{P}(S_m = k) - \mathbb{P}(T_m = k)| \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right]$ (*)

Selon 9.b) $\delta(S_m, T_m) \leq 4 \sum_{k=1}^{m} p_k^2$

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(S_m = k) - \mathbb{P}(T_m = k)| \leq 4 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m+k)^2}$

$k \geq 0$ donc $(m+k)^2 \geq m^2$ puis $\frac{1}{(m+k)^2} \leq \frac{1}{m^2}$

Alors $4 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m+k)^2} \leq 4 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m^2} = \frac{4}{m}$

finalement $\sum_{k=0}^{+\infty} |P(S_n=k) - P(T_n=k)| \leq 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{4}{n}$

En particulier, [pour $\forall k \in \mathbb{N}$ $|P(S_n=k) - P(T_n=k)| \leq \frac{4}{n}$] (**)
car tous les termes sont positifs.

cl de (*) et (**) $\left[\forall k \in \mathbb{N} \quad \left|P(S_n=k) - \frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n}\right| \leq \frac{4}{n}\right]$

11.b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et $t \in [k, k+1]$

$$k \leq t \leq k+1 \implies n+k \leq n+t$$
$$\implies \frac{1}{n+t} \leq \frac{1}{n+k}$$

Dès lors $\int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{n+k}\,dt = \frac{1}{n+k}$ (les bornes sont dans le bon sens)

De même $\frac{1}{n+k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt$

cl $\left[\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt\right]$

11.c) En additionnant terme à terme :
$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,dt$$

alors $\int_1^{n+1} \frac{1}{n+t}\,dt \leq s_n \leq \int_0^{n} \frac{1}{n+t}\,dt$) Chasles

puis $[\ln|n+t|]_1^{n+1} \leq s_n \leq [\ln|n+t|]_0^{n}$

soit $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq s_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$

cl $\left[\forall n \geq 2 \quad \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq s_n \leq \ln(2)\right]$

$\frac{2n+1}{n+1} \sim \frac{2n}{n} \sim 2$ donc par composée $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$

cl selon le thme de l'encadrement $\left[\lim_{n\to+\infty} s_n = 2\right]$

11.d) Selon 11.a) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\left|P(S_n=k) - \frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n}\right| \leq \frac{4}{n}$

et selon 11.c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n} = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$

Dès lors $\left|P(S_n=k) - \frac{2^k}{k!} e^{-2}\right| = \left|P(S_n=k) - \frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n} + \frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n} - \frac{2^k}{k!} e^{-2}\right|$

puis $\left|P(S_n=k) - \frac{2^k}{k!} e^{-2}\right| \leq \left|P(S_n=k) - \frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n}\right| + \left|\frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n} - \frac{2^k}{k!} e^{-2}\right|$

donc $0 \leq \left|P(S_n=k) - \frac{2^k}{k!} e^{-2}\right| \leq \frac{1}{n} + \left|\frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n} - \frac{2^k}{k!} e^{-2}\right|$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \left| \frac{s_n^k}{k!} e^{-s_n} - \frac{2^k}{k!} e^{-2} \right| = 0$$

donc selon le thme de l'encadrement $\lim_{n\to+\infty} \left| P(S_n = k) - e^{-2} \frac{2^k}{k!} \right| = 0$

Cl pour tt $k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}$

donc $\left[S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(2) \right]$

BILAN

Là encore il y avait des questions accessibles qu'il fallait bien repérer.

Partie 3 - Etude du maximum d'une fonction

12. • h est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fcts usuelles de classe C^1

• dérivabilité en 0

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \frac{e^x-1-x}{x^2}$$

or $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc $e^x-1-x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2)$

Dès lors $\frac{h(x)-h(0)}{x-0} \sim \frac{x^2/2}{x^2} \sim \frac{1}{2}$

donc h est dérivable en 0 et $h'(0)=\frac{1}{2}$

• de classe C^1 en 0

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad h'(x) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{(x-1)(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))+1}{x^2}$$

$$= \frac{x-1+x^2-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = h'(0)$ donc h' est continue en 0

cl $\boxed{h \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } h'(0)=\frac{1}{2}}$

13. a) Posons $H(x)=\int_0^x h(t)dt$. Par pté H est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad H'(x)=h(x)$

$g: x\mapsto e^{-x}H(x)$ est donc C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par produit et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad g'(x) = -e^{-x}H(x)+e^{-x}H'(x)$$

$$= e^{-x}(h(x)-H(x))$$

$$= e^{-x}\left(h(x)-\int_0^x h(t)\,dt\right)$$

D'autre part $1-\int_0^x (h(t)-h'(t))\,dt = 1-\int_0^x h(t)\,dt+[h(t)]_0^x$

$$= 1-\int_0^x h(t)\,dt+h(x)-h(0)$$

$$= h(x)-\int_0^x h(t)\,dt \quad \text{car } h(0)=1$$

cl $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad g'(x)=e^{-x}\left(1-\int_0^x (h(t)-h'(t))\,dt\right)}$

13.b) $\forall t>0 \quad h(t)-h'(t) = \dfrac{e^t-1}{t} - \dfrac{te^t-e^t+1}{t^2}$

$$= \frac{te^t-t-te^t+e^t-1}{t^2}$$

$$= \frac{e^t-t-1}{t^2}$$

cl $\left[\forall t>0 \quad h(t)-h'(t) = \dfrac{e^t-t-1}{t^2}\right]$

13.c) Selon 1 $\forall t\in\mathbb{R}$ $e^t \geq t+1$ et si l'on reprend l'étude faite en 1 le seul cas d'égalité est en 0.

Dès lors $\forall t>0$ $e^t > t+1$ donc $e^t-t-1>0$

cl $\left[\forall t>0 \quad h(t)-h'(t)>0\right]$ cela reste vrai pour $t=0$ car $h(0)=1$ et $h'(0)=\frac{1}{2}$

$$\frac{h(t)-h'(t)}{t} = \frac{e^t-1-t}{t^3} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad (\text{TCC})$$

donc $\exists A>0$ tq $\forall t\geq A$ $\dfrac{h(t)-h'(t)}{t} \geq 1$

puis $\forall t\geq A$ $h(t)-h'(t)\geq t$

Alors $\forall x\geq A$ $\displaystyle\int_A^x (h(t)-h'(t))\,dt \geq \int_A^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_A^x = \frac{x^2}{2}-\frac{A^2}{2}$

Selon Chasles $\displaystyle\int_0^x (h(t)-h'(t))\,dt = \underbrace{\int_0^A (h(t)-h'(t))\,dt}_{\geq 0} + \int_A^x (h(t)-h'(t))\,dt$

Dès lors $\forall x\geq A$ $\displaystyle\int_0^x (h(t)-h'(t))\,dt \geq \frac{x^2}{2}-\frac{A^2}{2}$

cl $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}-\frac{A^2}{2} = +\infty$, selon le lemme d'entraînement $\left[\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (h(t)-h'(t))\,dt = +\infty\right]$

13.d) $T: x\mapsto \displaystyle\int_0^x (h(t)-h'(t))\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$ $T'(x)=h(x)-h'(x)$

Selon 13.c) $\forall x\geq 0$ $T'(x)>0$ donc T est strictement croissante.

De plus elle est continue (car dérivable) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $T(\mathbb{R}_+) = [T(0), \lim\limits_{x\to+\infty} T(x)[= [0,+\infty[$ selon 13.c)

1 appartient à l'intervalle d'arrivée donc l'équation $T(x)=1$ admet une unique solution $\gamma>0$.

De plus on a $T(x)>1 \iff x>\gamma$

Enfin $g'(x) = e^{-x}(1-T(x))$ d'où

x	0		γ		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

14.a) Posons $\varphi(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \geq 0$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \geq 0 \quad \varphi'(t) = e^t - 1 - t \geq 0$ selon 1.

Donc φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \geq 0 \quad \varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$

Dès lors $\forall t > 0 \quad e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} \geq 0$ donc $e^t - 1 - t \geq \frac{t^2}{2}$ $\Big) \times \frac{1}{t^2} > 0$

puis $\frac{e^t - 1 - t}{t^2} \geq \frac{1}{2}$

cl $\left[\forall t > 0 \quad \frac{1}{2} \leq \frac{e^t - 1 - t}{t^2}\right]$ $(*)$

Posons $\psi(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}e^t$ pour $\forall t \geq 0$

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \geq 0 \quad \psi'(t) = e^t - 1 - te^t - \frac{t^2}{2}e^t$

$= (1 - t - \frac{t^2}{2})e^t - 1$

ψ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t \geq 0 \quad \psi''(t) = (-1-t)e^t + (1 - t - \frac{t^2}{2})e^t$

$= (-2t - \frac{t^2}{2})e^t \leq 0$

ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\psi'(0) = 0$ donc ψ' est négative sur $\mathbb{R}_+$

Dès lors ψ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\psi(0) = 0$

cl $\forall t > 0 \quad \psi(t) \leq 0$ donc $e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}e^t \leq 0$

donc $\left[\frac{e^t - 1 - t}{t^2} \leq \frac{e^t}{2}\right]$ $(**)$

cl de $(*)$ et $(**)$ $\left[\forall t > 0 \quad \frac{1}{2} \leq \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \leq e^t/2\right]$

14.b) De 13.b) et 14.a) $\forall t > 0 \quad \frac{1}{2} \leq h(t) - h'(t) \leq \frac{e^t}{2}$

et cela reste vrai en 0 car $h(0) - h'(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

En intégrant (les bornes sont dans le bon sens)

$\forall x \geq 0 \quad \int_0^x \frac{1}{2}\,dt \leq \int_0^x (h(t) - h'(t))\,dt \leq \frac{1}{2}\int_0^x e^t\,dt$

puis $\frac{x}{2} \leq \int_0^x (h(t) - h'(t))\,dt \leq \frac{1}{2}(e^x - 1)$

donc $1 - \frac{1}{2}(e^x - 1) \leq 1 - \int_0^x (h(t) - h'(t))\,dt \leq 1 - \frac{x}{2}$ $\Big) \times e^{-x} > 0$

finalement $e^{-x}\left(\frac{3 - e^x}{2}\right) \leq e^{-x}\left(1 - \int_0^x (h(t) - h'(t))\,dt\right) \leq e^{-x}(1 - \frac{x}{2})$

cl $\left[\forall x \geq 0 \quad e^{-x}\left(\frac{3 - e^x}{2}\right) \leq g'(x) \leq e^{-x}(1 - \frac{x}{2})\right]$

14.c) En posant $x = \ln(3)$ $\quad 0 \leq g'(\ln(3)) \leq \frac{1}{3}(1 - \frac{\ln(3)}{2})$

puis $x = 2$ $\quad e^{-2}\left(\frac{3 - e^2}{2}\right) \leq g'(2) \leq 0$

Selon 13.d) $\quad g'(\ln(3)) \geq 0$ donc $\ln(3) \leq \gamma$

et $g'(2) \leq 0$ donc $2 \geq \gamma$

cl $[\gamma \in [\ln(3), 2]]$

15. a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,m]$

- $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\geqslant 0}$

donc $\left[e^x \geqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \right]$ ①

- $e^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

$= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^{k-m}}{k!/m!}$

or pour $k \geqslant m+1$ $\frac{k!}{m!} = \underbrace{k(k-1)\dots(m+1)}_{k-m \text{ terme } \geqslant m+1} \geqslant (m+1)^{k-m}$

Dès lors $\frac{x^{k-m}}{k!/m!} \leqslant \left(\frac{x}{m+1}\right)^{k-m}$ donc $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^{k-m}}{k!/m!} \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{m+1}\right)^{k-m}$

Il vient $\left[e^x \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{m+1}\right)^{k-m} \right]$ ②

- $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{m+1}\right)^{k-m} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{m+1}\right)^{i}$ $(i = k-m)$

$= \frac{x}{m+1} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{m+1}}$

$= \frac{x}{m+1} \times \frac{m+1}{m+1-x}$

$= \frac{x}{m+1-x}$

Enfin $x \leqslant m$ donc $m+1-x \geqslant 1$ et $\frac{x}{m+1-x} \leqslant x$

Dès lors $\frac{x^m}{m!} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{m+1}\right)^{k-m} \leqslant \frac{x^m}{m!} \times x$

on a : $\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{m+1}\right)^{k-m} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{m+1}}{m!} \right]$ ③

Cl de ①, ② et ③ $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [0,m]$

$\left[\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{m+1}\right)^{k-m} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{m+1}}{m!} \right]$

Alors $\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} - 1 \leqslant e^x - 1 \leqslant \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{m+1}}{m!} - 1$ $\Big\} -1$

ie $\sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x - 1 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{m+1}}{m!}$ $\Big\}$ le terme en 0 vaut 1

alors pour $x > 0$ $\sum_{k=1}^{m} \frac{x^{k-1}}{k!} \leqslant \frac{e^x - 1}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{k-1}}{k!} + \frac{x^m}{m!}$ $\Big\} \times \frac{1}{x} > 0$

cl $\left[\forall n\in\mathbb{N}^* \ \forall x\in[0,n] \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!}\leq h(x)\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!}+\frac{x^n}{n!}\right]$

la pté reste vrai pour $n=0$ car $h(0)=1$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{0^{k-1}}{k!}=1$

15.b) Selon 15.a), pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,n]$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^x \frac{t^{k-1}}{k!}dt \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n}\int_0^x \frac{t^{k-1}}{k!}dt+\int_0^x \frac{t^n}{n!}dt$$

d'où $$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{t^k}{k.k!}\right]_0^x \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{t^k}{k.k!}\right]_0^x+\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x$$

puis $$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!.k} \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k.k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Enfin $\forall x\in[0,n]$ $g(x)=e^{-x}\int_0^x h(t)\,dt$ donc en multipliant par $e^{-x}>0$

cl $\left[\forall n\in\mathbb{N}^* \ \forall x\in[0,n] \quad e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!.k}\leq g(x)\leq e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k}+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k}$ (converge car $\frac{x^k}{k!k}\leq\frac{x^k}{k!}$ qui est le terme général d'une série convergente)

et par le TCC $\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$

cl selon le thme de l'encadrement $\left[\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad g(x)=e^{-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k}\right]$

16.

```
while d*np.exp(-x) > 0.0001 :
    n = n+1
    s = s+ d/n          # à chaque passage d = x^n/n!
    d = d*x/(n+1)       # et s = sum_{k=1}^{n} x^k/k!
Y.append(s*np.exp(-x))
```

BILAN

Il y avait de quoi s'occuper dans cette partie. Beaucoup de questions étaient accessibles même si cela demandait beaucoup de temps!

Il fallait être stratégique dans les deux premières parties pour garder du temps pour celle-ci : nettement plus abordable.

Partie 4 - Le problème du meilleur choix

17. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_{n,s}$ est le premier rang pour lequel $(X_k > s)$ si un tel évt est réalisé. Sinon $a_{n,s} = n$

Si $(K_{n,s} = 1)$ alors il existe exactement un rang k tq $(X_k > s)$

Dans ce cas $(a_{n,s} = k)$ donc $(Y_{n,s} = k)$ et $(Z_n = X_k)$

Dès lors $(K_{n,s} = 1) \Rightarrow (Y_{n,s} = Z_n)$

cl $\boxed{P(Y_{n,s} = Z_n) \leq P(K_{n,s} = 1)}$

17. b) $(K_{n,s} = 1)$ si exactement un $k \in [1, n]$ vérifie $(X_k > s)$

Donc $(K_{n,s} = 1) = \bigcup_{k=1}^{n} \left((X_k > s) \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X_i \leq s) \right) \right)$

$\big)$ évts incompatibles

$$\text{Dès lors } P(K_{n,s} = 1) = \sum_{k=1}^{n} P\left((X_k > s) \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X_i \leq s) \right) \right)$$

$\big)$ indépendance

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X_k > s) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} P(X_i \leq s)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (1 - p_i)$$

D'autre part $P(Z_n \leq s) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq s)$

$$= P((X_1 \leq s) \cap \dots (X_n \leq s))$$

$\big)$ indépendance

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq s)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

Alors $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (1 - p_i) = \frac{1}{1 - p_k} \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) = \frac{\theta}{1 - p_k}$ $\quad (p_k \neq 1)$

Finalement $P(K_{n,s} = 1) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\theta}{1 - p_k}$

cl $\boxed{P(K_{n,s} = 1) = \theta \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{1 - p_k}}$

17. c) $P(Y_{n,s} = Z_n) \geq P(K_{n,s} = 1)$ selon 17.a)

$$\geq \theta \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{1 - p_k} \quad \text{selon 17.b)}$$

Or $\Theta = \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)$ donc $\ln(\Theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1-p_i)$ $\quad (\forall i \in [\![1,n]\!] \ 1-p_i > 0)$

or selon 1. $\ln(1+t) \leq t$ pour $\forall t > -1$

donc $\ln(1-p_i) \leq -p_i$ pour $\forall i \in [\![1,n]\!]$

il vient $\ln(\Theta) \leq \sum_{i=1}^{n} -p_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i$

Enfin $1-p_i \leq 1$ donc $\frac{1}{1-p_i} \leq 1$ puis $\frac{-p_i}{1-p_i} \leq -p_i$

Dès lors $\ln(\Theta) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_i}$

ou encore : $\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_i} \geq -\ln(\Theta)$

cl $\left[P(Y_{n,s} = Z_n) \geq \Theta \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_i} \geq -\Theta \ln(\Theta) \right]$

17. d) Posons $\forall x \in]0,1[\quad h(x) = -x\ln(x)$

h est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[\quad h'(x) = -1 - \ln(x)$

$h'(x) > 0 \iff -1 - \ln(x) > 0$

$\iff x < e^{-1}$

il vient :

x	0		e^{-1}		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$		$\searrow$	

h est maximal en e^{-1} et son maximum est $h(e^{-1}) = e^{-1}$

on a donc, pour $\Theta = e^{-1}$, $-\Theta\ln(\Theta) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

cl si $F_n(s) = \Theta = e^{-1}$ alors $P(Y_{n,s} = Z_n) \geq -\Theta\ln(\Theta) = \frac{1}{e}$

Enfin F_n est la fonction de répartition d'une v.A à densité. Elle est donc continue de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$

$e^{-1} \in]0,1[$ donc $\exists s \in \mathbb{R}$ tq $F_n(s) = e^{-1}$ (Thme de valeurs intermédiaires)

cl $\left[\exists s \in \mathbb{R} \text{ tq } P(Y_{n,s} = Z_n) \geq \frac{1}{e} \right]$

18. a) Pour $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $p = P(X_k > s) = 1 - F_k(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < 0 \\ 1-s & \text{si } s \in [0,1] \\ 0 & \text{si } s > 1 \end{cases}$

$p \in]0,1[$ donc $p = 1-s$

cl $[s = 1-p]$

18.b)

```python
def simulCouple(m,p):
    Z=0
    Y=0          # valeur fanfelu pour voir si Y a déjà été changé
    s=1-p
    for k in range(1,m+1):
        X=rd.random()        # U([0,1[)
        if X>s and Y==0 :
            Y=X
        if X>Z:
            Z=X          # recherche du maximum des X_k
    if Y==m :
        Y=X          # si X_k<=s pour tt k alors Y_m = X_m
    return Z,Y
```

18.c) On compte la fréquence de réalisation de l'evt $Y_m = Z_m$

```python
N= 10000
c=0
for k in range(n):
    Z,Y =simulCouple(10,0.5)
    if Z==Y :
        c = c+1
print(c/N)
```

19.a) Soit $j \in [\![1, \binom{m}{k}]\!]$, $x \in \mathbb{R}$ et $i \in I_j$

$$\mathbb{P}_{A_j}(X_i \leq x) = \frac{P\left((X_i \leq x) \cap \left(\bigcap_{\ell \in I_j} (X_\ell > s)\right) \cap \left(\bigcap_{\ell \notin I_j} (X_\ell \leq s)\right)\right)}{P\left(\bigcap_{\ell \in I_j} (X_\ell > s) \cap \left(\bigcap_{\ell \notin I_j} (X_\ell \leq s)\right)\right)}$$

$$= \frac{P\left((s < X_i \leq x) \cap \left(\bigcap_{\substack{\ell \in I_j \\ \ell \neq i}} (X_\ell > s)\right) \cap \left(\bigcap_{\ell \notin I_j} (X_\ell \leq s)\right)\right)}{P\left(\bigcap_{\ell \in I_j} (X_\ell > s) \cap \left(\bigcap_{\ell \notin I_j} (X_\ell \leq s)\right)\right)}$$

indép.

$$= \frac{P(s < X_i \leq x) \prod_{\substack{\ell \in I_j \\ \ell \neq i}} P(X_\ell > s) \prod_{\ell \notin I_j} P(X_\ell \leq s)}{P(X_i > s) \prod_{\substack{\ell \in I_j \\ \ell \neq i}} P(X_\ell > s) \prod_{\ell \notin I_j} P(X_\ell \leq s)}$$

$$= \frac{P(s < X_i \leq x)}{P(X_i > s)} = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(s)}{1 - F(s)} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\underline{\underline{\text{cl}}}$ $F(s) = 1-p$ donc $\left[\forall x \in \mathbb{R} \ \forall i \in I_j \quad P_{A_j}(X_i \leq x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(s)}{p} & \text{si } x>s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right]$

Soit J une partie de $[\![1, n]\!]$

- si $J \subset I_j$ alors

$$P_{A_j}\left(\bigcap_{i \in J} (X_i \leq x)\right) = \prod_{i \in J} \frac{P(s < X_i \leq x)}{P(X_i > s)}$$ (même calcul que ci-avant)

$$= \prod_{i \in J} P_{A_j}(X_i \leq x)$$

- sinon

$$P_{A_j}\left(\bigcap_{i \in J} (X_i \leq x)\right) = \prod_{i \in J} P_{A_j}(X_i \leq x) = 0$$

$\underline{\underline{\text{cl}}}$ $\left[\text{les v.A } X_i \ \ 1 \leq i \leq n \text{ sont mutuellement indépendantes pour la probabilité } P_{A_j} \right]$

19.b) Soit $r \in I_j$

$$P_{A_j}\left(X_r = \max_{i \in I_j}(X_i)\right) = P_{A_j}\left(\max_{i \in I_j \setminus \{r\}}(X_i) \leq X_r\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{M_{I_j}}(t) f_{X_r}(t)\, dt \quad \text{où } M_{I_j} = \max_{i \in I_j \setminus \{r\}}(X_i)$$

où les fct° de répartition et densités sont dans $(\Omega; \mathcal{A}; P_{A_j})$

Selon 19.a) $F_{X_r}(x) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(s)}{p} & \text{si } x>s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Une densité de X_r est donc $f_{X_r}(t) = \begin{cases} f(t)/p & \text{si } t>s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Classiquement $P_{A_j}\left(\max_{i \in I_j \setminus \{r\}}(X_i) \leq x\right) = (F(x))^{\operatorname{card}(I_j)-1}$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$

$$= \begin{cases} \left(\frac{F(x)-F(s)}{p}\right)^{k-1} & \text{si } x>s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dès lors $P_{A_j}\left(X_r = \max_{i \in I_j}(X_i)\right) = \int_s^{+\infty} \left(\frac{F(t)-F(s)}{p}\right)^{k-1} \cdot \frac{f(t)}{p}\, dt$

$$= \frac{1}{p^k} \int_s^{+\infty} (F(t)-F(s))^{k-1} f(t)\, dt$$

Posons $I(A) = \int_s^A (F(t)-F(s))^{k-1} f(t)\,dt$

$$= \left[\frac{(F(t)-F(s))^k}{k} \right]_s^A$$

$$= \frac{(F(A)-F(s))^k}{k}$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{(1-F(s))^k}{k} = \frac{p^k}{p} \quad \text{car } F(s) = s = 1-p \text{ selon } 18.a)$$

cl $\left[P_{A_j}(X_n = \max_{i\in I_j}(X_i)) = \frac{1}{p^k} \int_s^{+\infty} (F(t)-F(s))^{k-1} f(t)\,dt = \frac{1}{p} \right]$

19.c) Clairement, $(K_{m,s} = k) = \bigcup_{i=1}^{\binom{m}{k}} A_j$

Donc $P((Y_{m,s} = Z_m) \cap (K_{m,s} = k)) = \sum_{i=1}^{\binom{m}{k}} P((Y_{m,s} = Z_m) \cap (K_{m,s} = k))$ les A_j sont disjoints

De plus, $P_{A_j}(Y_{m,s} = Z_m) = P_{A_j}(X_{a_{n,s}} = \max_{k\in A_j}(X_k))$

$$= \frac{1}{k} \quad (\text{selon } 19.b))$$

cl $\left[P((Y_{m,s} = Z_m) \cap (K_{m,s} = k)) = \sum_{i=1}^{\binom{m}{k}} P((Y_{m,s} = Z_m) \cap (K_{m,s} = k)) \right]$

et $\left[P_{A_j}(Y_{m,s} = Z_n) = \frac{1}{k} \right]$

19.d) Clairement, $(K_{m,s} = 0) = \bigcap_{i=1}^{m} (X_i \leq s)$ donc $\left[P(K_{m,s} = 0) = (1-p)^m = s^m \right]$

et $(Y_{m,s} = Z_m) \cap (K_{m,s} = 0) = (X_m = Z_m) \cap (K_{m,s} = 0)$

(car si $(K_{m,s} = 0)$ alors $a_{m,s} = m$ donc $Y_{m,s} = X_m$)

donc $(Y_{m,s} = Z_m) \cap (K_{m,s} = 0) = (X_m = \max_{k\in[\![1,m]\!]}(X_k)) \cap (K_{m,s} = 0)$

En procédant comme dans 19.b)

$\left[P_{(K_{m,s}=0)}(X_m = \max_{k\in[\![1,m]\!]}(X_k)) = \frac{1}{p^m} \int_{-\infty}^{s} \left(\frac{F(t)}{F(s)}\right)^{m-1} \frac{f(t)}{F(s)}\,dt = \frac{1}{m} \right]$

Donc $P((Y_{m,s} = Z_m) \cap (K_{m,s} = 0)) = P(K_{m,s} = 0)\, P_{(K_{m,s}=0)}(Y_{m,s} = Z_m)$

$$= s^m \cdot \frac{1}{m} = \frac{(1-p)^m}{m}$$

cl $\left[P((Y_{m,s} = Z_n) \cap (K_{m,s} = 0)) = \frac{(1-p)^m}{m} \right]$

19.e) Selon 19.c)

$$P((Y_{n,s}=z_n)\cap(K_{n,s}=k)) = \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} P(A_j)\cdot P_{A_j}((Y_{n,s}=z_n))$$
$$= \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} P(A_j)\cdot\frac{1}{k}$$

or $P(A_j) = \prod_{i\in I_j} P(X_i > s)\prod_{i\notin I_j} P(X_i\le s)$
$$= (1-s)^k s^{n-k}$$

Il vient $P((Y_{n,s}=z_n)\cap(K_{n,s}=k)) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}}(1-s)^k s^{n-k}$
$$= \frac{1}{k}\binom{n}{k}(1-s)^k s^{n-k}$$

Alors selon la FPT appliquée au SCE $(K_{n,s}=k)_{0\le k\le n}$

$$r_n = P(Y_{n,s}=z_n) = P((Y_{n,s}=z_n)\cap(K_{n,s}=0)) + \sum_{k=1}^{n} P((Y_{n,s}=z_n)\cap(K_{n,s}=k))$$
$$= \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}(1-s)^k s^{n-k}$$

cl $\left[r_n = \frac{1}{n}(1-p)^n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}(1-s)^k s^{n-k}\right]$

20.a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ pour $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $\frac{1}{k}\le 1$ donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|$$
$$\le \sum_{k=0}^{n}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|$$

cl selon 10 $\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| \le \frac{4\lambda^2}{n}\right]$ pour $\forall n\in\mathbb{N}^*$

20.b) Selon l'inégalité triangulaire, pour $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|$$

donc selon 20.a) $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!\,k}\right| \le \frac{4\lambda^2}{n}$

or selon 19.e) $r_n = \frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

on a donc : $\left| r_n - \frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!\,k}\right| \le \frac{4\lambda^2}{n}$

puis : $-\frac{4\lambda^2}{n} \leq r_n - \frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!\,k} \leq \frac{4\lambda^2}{n}$

soit encore $-\frac{4\lambda^2}{n} + \frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\,k} e^{-\lambda} \leq r_n \leq \frac{4\lambda^2}{n} + \frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\,k} e^{-\lambda}$

Enfin $\lim_{n\to+\infty} \frac{4\lambda^2}{n} = 0$; $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = 0$

et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!\,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!\,k}$

cl selon le thme de l'encadrement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!\,k} e^{-\lambda}}$

21. Selon 15.b) $r_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!\,k} e^{-\lambda} = g(\lambda)$

et selon 13.d) g admet un maximum en un unique réel γ.

cl r_n est maximale lorsque $\lambda = \gamma$ or $s = 1-p$ et $p = \frac{\lambda}{n}$

Donc $\boxed{r_n \text{ est maximale lorsque } s = 1 - \frac{\gamma}{n}}$

BILAN

Une fois qu'on avait compris le contexte de l'énoncé, cette partie comportait beaucoup de questions accessibles. Par contre les questions d'informatique étaient difficiles.

Encore fallait-il arriver jusque là !

BILAN GÉNÉRAL

Ce sujet était classique pour un sujet maths I. Difficile, long mais avec aussi des questions accessibles (surtout dans les partie II). Ce sujet devrait permettre de faire un tri efficace des candidats.

Ce sont les candidats stratégiques qui auront bien su organiser leur temps qui tireront le mieux leur épingle du jeu.