

HEC - ESSEC 2019

★ Exercice - Algèbre linéaire

L'objectif : montrer qu'une matrice M de rang 1 est équivalente à E_{11} puis à E_{ij} .

- sur un exemple d'ordre 3 avec écriture $M = CL$;
- écriture informatique des opérations élémentaires de lignes ;
- le cas général

Prérequis. EV, AL, matrices, réduction

★ Problème - Probas

Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ et des cumulants $K_X(t) = \ln(M_X(t))$.

• Partie I - le cas discret

Différents exemples liés à la loi binomiale avec simulation informatique et application de la loi des grands nombres.

Prérequis. Probas de première année - couples - thme de transfert.

• Partie II - le cas continu

K_Y pour $Y = aX + b$ et K_{X+Y} . Calcul du cumulants pour des lois uniformes, de Poisson, Normales.

Utilisation du TCL pour un calcul de limite.

Prérequis. Densité, lois usuelles, convergence.

• Partie III - Cumulant d'ordre 4 - kurtosis

Lien entre cumulants d'ordre 4, variance et kurtosis.

Prérequis. Dérivées successives. Couples de variables aléatoires.

ESSEC 2019

Un problème consacré à l'étude de la notion d'**entropie** qui en un certain sens mesure le désordre qui intervient dans une expérience.

• Partie I - le cas des variables aléatoires à densité

- définition de l'entropie d'une VA
- entropie de αX , $c + X$ et des lois usuelles (uniforme, exponentielle, normale, bilatérale)
- entropie jointe ; utilisation du coefficient de corrélation linéaire pour des VA à densité (après avoir généralisé les propriétés connues pour les VA discrètes)

Prérequis. Densité, thme de transfert, coefficient de corrélation linéaire.

• Partie II - le cas des variables aléatoires discrètes

- Définition de l'entropie $H(X)$ d'une VA de support $\llbracket 0, n \rrbracket$. Exemples. Simulation informatique.
- Démonstration de l'inégalité de Jensen, si φ est convexe alors : $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$
- $H(X) \leq \log_2(n + 1)$.

Prérequis. Probas de première année. Thme de transfert. Convexité. Couples de VA discrètes.

• Partie III - Entropie jointe et information mutuelle

- Définition de l'entropie jointe $H(X, Y)$ deux VA discrètes. Propriétés.
- Entropie conditionnelle. Lien avec l'entropie jointe. Exemples.
- Définition de l'information mutuelle. Propriétés, lien avec l'entropie jointe et l'entropie conditionnelle.

Prérequis. Couples de variables aléatoires discrètes.