

**ECRICOME 2018**

★ **Exercice 1 - Algèbre linéaire**

• **Partie I**

Diagonalisation simultanée de deux matrices  $A$  et  $B$ .

• **Partie II**

Étude d'une suite RL2 de matrices colonnes :  $X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$ .

Simulation informatique, analyse graphique des résultats.

**Prérequis.** EV, AL, matrices, réduction. La deuxième partie est très calculatoire.

★ **Exercice 2 - Analyse**

• **Partie I**

Étude hyper-classique des suites adjacentes définies par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  et  $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ .

Simulation informatique.

• **Partie II**

Étude de la série  $\sum \frac{1}{n(2n-1)}$  par séparation termes pairs/impairs. Calcul de la somme en utilisant la partie I puis les sommes de Riemann (à ne pas confondre avec les séries de Riemann).

**Prérequis.** Analyse de première année, DL, séries, sommes de Riemann. Peut être fait presque en entier en première année.

★ **Exercice 3 - Probabilités**

Étude d'un jeu dans une fête foraine. Recherche des conditions optimales pour que d'une part il y ait plus de gagnants que de perdants et que d'autre part le forain maximise son gain.

**Prérequis.** VA discrètes. Lois discrètes usuelles. Thème de transfert. Formule du binôme. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Les trois premières parties ont été traitées au DS 8 en première année.

**EDHEC 2018**

★ **Exercice 1 - Algèbre linéaire**

Étude de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par  $M \mapsto AM$ . Noyau image. On montre que  $f$  et  $A$  ont les mêmes valeurs propres sur un exemple puis dans le cas général.

**Prérequis.** EV, AL, matrices, réduction.

★ **Exercice 2 - Probas discrètes**

Trois pièces : PP ; FF et PF. On choisit une pièce et on la lance indéfiniment. Étude des VAD  $X$  et  $Y$  égales au rang d'apparition du premier "pile" [resp. "face"].

Loi de  $X + Y$ . Simulation de  $X$ .

**Prérequis.** VA discrètes de première année. Lois conjointes, loi d'une somme.

★ **Exercice 3 - Densité**

La très classique densité :  $f(x) = \frac{x}{a}e^{-x^2/2a}$  sur  $[0, +\infty[$ . Lien avec la loi exponentielle et la loi normale pour calculer son espérance et sa variance. Simulation.

Estimation et intervalle de confiance pour le paramètre  $a$ .

**Prérequis.** Densité, Estimation, BT, intervalles de confiance.

★ **Problème**

• **Partie I**

Étude de la fonction  $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)dt$ . Dérivée, variations, parité, convexité, simplification par IPP puis recherche d'un équivalent de  $f(x)$  en  $+\infty$  puis 0.

Calcul approché de  $f(1)$  par la méthode de Monte-Carlo.

- **Partie II**

Étude de la suite  $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$ . Variations, convergence, limite. Expression intégrale de la somme de la série  $\sum u_n$ .

**Prérequis.** Cours sur les intégrales de première année. Intégrales généralisées de 2<sup>ème</sup> année.

EM LYON 2018

★ **Exercice 1 - Algèbre linéaire**

Étude de la diagonalisabilité de deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Utilisation du point précédent pour étudier l'EV  $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = AM\}$ . On montre en particulier que  $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$  (difficile).

**Prérequis.** EV, AL, réduction.

★ **Exercice 2 - Analyse**

- **Partie I** Étude de la fonction  $f(x) = x - \ln(x)$ .

- **Partie II** Étude de la suite  $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$  par l'IAF. Algorithme.

- **Partie III**

Étude de  $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$ . Dérivée, variation, prolongement par continuité en 0, tracé de la courbe.

- **Partie IV**

Étude d'une fonction de deux variables. Erreur d'énoncé (prendre  $U = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ ).

**Prérequis.** Analyse de première année. Fonctions de deux variables.

★ **Exercice 3 - Probas**

- **Partie I**  $X$  est la loi du nombre de faces avant le second pile.

- **Partie II**

On place  $X+1$  boules dans une urne de 0 à  $X$ .  $U$  est le numéro obtenu. Loi de  $U$  et  $V = X - U$ . Covariance.

- **Partie III**

Tournoi entre deux joueurs avec des pièces différentes. Simulation. Recherche d'un jeu équilibré.

**Prérequis.** Probas discrètes de première année. Couples.