

ECG 2 - QUINZAIN 9 - SEMAINE 18

Du 2/02 au 7/02

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS - CHAÎNES DE MARKOV

Cours

★ CH 12 - SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Reprise du programme précédent

★ CH 13 - CHAÎNES DE MARKOV

- Rappels sur les graphes : graphe orienté, pondéré, formule d'Euler, matrice d'adjacence.

- **Vocabulaire**

Chaîne de Markov (X_n) , probabilité de transition. Dans les exercices les chaînes de Markov seront homogènes (ie. la probabilité de transition ne dépend pas de n).

La matrice ligne $V_n = (\mathbb{P}(X_n = 1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_n = r))$ est appelée n -ème état probabiliste.

- Diagramme de transition, matrice de transition. Elle est stochastique (coeff. positifs et somme de chaque ligne égale à 1).

Relation : $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=1}^r m_{ij} \mathbb{P}(X_{n-1} = i)$ qui se traduit par $V_n = V_{n-1} M$.

- **Comportement limite**

V est un état stable si V est une matrice ligne stochastique telle que $V = VM$. Alors ${}^t V$ est un vecteur propre de ${}^t M$.

Notion d'état probabiliste limite de la chaîne. C'est un état stable de la chaîne.

Exigences

Les étudiants doivent être capables de résoudre des exercices de ce type :

- Montrer qu'une fonction donnée est solution particulière d'une ED. Chercher une solution particulière dans des cas simples.
- Résoudre une ED d'ordre 1 ou 2.
- Résoudre un système différentiel d'ordre 1 homogène à coefficients constants lorsque la matrice associée est diagonalisable.
- De manière guidée, résoudre un tel système lorsque A est triangularisable.
- Résoudre un problème de Cauchy.
- Étudier la convergence d'une trajectoire. Rechercher les trajectoires d'équilibre.
- Exercices simples sur les graphes.
- Savoir utiliser les fonctions de la bibliothèque `numpy.linalg` de Python (`al.matrix_power()`, `al.matrix_rank()`, `al.eig()`).
- Tracer le diagramme de transition d'une chaîne de Markov. Déterminer sa matrice de transition.
- Démontrer la relation $V_n = V_{n-1} M$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Savoir déterminer un état stable de la chaîne : en cherchant l'espace propre de ${}^t M$ associé à la VP 1, ou par observation de l'expérience.
- Étudier de manière guidée un processus de Markov (montrer que $V_n = V_0 M^n$, calculer M^n par diagonalisation, chercher l'état limite, etc.).

Questions de cours

On commencera la colle par l'une des questions suivantes :

- Si A est diagonalisable et si ses valeurs propres sont toutes négatives alors toutes les trajectoires du système diff. $X' = AX$ sont convergentes. Si A admet au moins une VP strict. positive alors certaines trajectoires divergent.
- L'exemple 7 du ch 12. Résoudre le système différentiel :
$$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= 3y \end{cases}$$
- L'exemple 8 du ch12. On considère le système différentiel (S) :
$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{cases} .$$

Soit A la matrice du système. On admet que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Résoudre (S) .

Semaine 19 : chaînes de Markov - variables aléatoires à densité