ORAL HEC 2016

MATHEMATIQUES

Options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Elles ont mobilisé 4 à 5 jurys par demi-journée afin de pouvoir interroger l'ensemble des 651 candidats admissibles présents.

1. Procédure d'interrogation

Le mode d'interrogation reste identique à celui des concours précédents : le sujet proposé aux candidats, quelle que soit l'option dont ils sont issus, comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal ;
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements.

Rappelons tout d'abord que les exercices (avec préparation et sans préparation) proposés aux candidats comportent un certain nombre de questions et il est clair qu'un candidat qui résout entièrement son sujet avec aisance et une argumentation solide se verra attribuer la note maximale de 20.
Mais, il n'est pas nécessaire de « tout faire » pour obtenir une excellente note, voire un « 20 » ! En effet, la réactivité aux informations fournies par le jury, la vivacité d'esprit et la maîtrise du cours entrent dans une large part dans l'appréciation de la prestation des candidats.
L'exercice sans préparation posé en fin d'interrogation joue son rôle d'amortisseur ou d'amplificateur de la note de l'exercice principal.

Bien que le « filtre » des épreuves écrites ne soit pas parfait, l'oral élimine les raisonnements approximatifs ou les récitations de recettes non maîtrisées n'ayant qu'un rapport lointain avec la question à résoudre.

La connaissance du cours a certes tendance à s'améliorer, mais ce phénomène est beaucoup trop lent à se mettre en place.

Peu ou prou, les remarques négatives consignées dans les comptes rendus des épreuves écrites ou orales des concours précédents restent largement d'actualité : hormis quelques très (trop ?) rares candidats brillants produisant de remarquables exposés, la majorité des candidats manquent de maturité et de recul et se raccrochent à des exercices étudiés en cours.
C'est ainsi que souvent, les candidats n'écoutent pas le jury dont les remarques contiennent une indication à peine voilée sur la marche à suivre ou l'erreur à rectifier !
A cet égard, les interrogateurs ont observé chez les candidats une attitude qui tend à s'accélérer ces dernières années et qui se manifeste par une répétition de locutions à la mode (« du coup ») et, plus grave, l'affirmation « j'ai plusieurs pistes » pour résoudre une question donnée mais sans préciser la direction à suivre et en quoi consistent ces fameuses pistes !

Introduit au concours 2015 pour les options scientifique et économique, le langage Scilab était pour la première fois cette année, au programme de l'option technologique.
Le jury a constaté que dans l'ensemble, les candidats étaient bien mieux préparés que l'an passé pour résoudre les questions relatives à ce langage.

Enfin, les illustrations (représentations) graphiques de certains résultats de cours sont quasiment toujours absentes : ainsi par exemple, la visualisation dans l'espace à trois dimensions d'une projection orthogonale sur un plan parallèlement à une droite (théorème de Pythagore) pose des problèmes insurmontables à nombre de candidats.

3. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (405 candidats): 10,82 (11,22 en 2015);
- *option économique* (196 candidats): 10,63 (9,11 en 2015);
- *option technologique* (35 candidats): 10,29 (12,09 en 2015);
- *option littéraire B/L* (15 candidats): 12,00 (10,12 en 2015).

Dans **l'option scientifique**, le niveau général est moins bon que celui du concours 2015 : les notes s'étendent entre 1 et 20 et l'écart-type de 3,56 permet de classer correctement les admissibles.
Cette année encore, les sujets d'analyse (suites, fonctions réelles, calcul différentiel et intégral) posent d'importants problèmes à une majorité de candidats : les notions les plus élémentaires - étude de fonctions, représentations graphiques, convexité et concavité, théorèmes classiques – ne sont pas du tout maîtrisées.

Dans **l'option économique**, le jury a observé cette année, un peu moins de mauvaises prestations de la part des candidats: les notes s'étendent entre 2 et 20 et l'écart-type de 4,25, relativement élevé a permis de discriminer correctement les candidats de cette option.

On note cependant de nombreuses erreurs dans des calculs élémentaires (dérivations, primitives de fonctions simples), ou encore des résultats non simplifiés à leur plus simple expression.

On assiste dans **l'option technologique** à une augmentation très sensible du nombre d'admissibles par rapport au concours 2015 qui passe de 23 à 35.
La note moyenne est en baisse par rapport à 2015 (10,29 contre 12,09) et la baisse de l'écart-type qui passe de 3,92 à 3,25 témoigne d'une assez forte homogénéité du niveau mathématique des candidats de cette option. A cet égard, l'étendue des notes est de 12 ponts seulement, les notes minimale et maximale étant respectivement de 5 et 17.

Enfin, dans **l'option littéraire B/L**, la note moyenne des 15 candidats présents est de 12 en nette augmentation par rapport à 2015 (10,12 en 2015). Bien que moins élevé qu'en 2015, l'écart-type de 4,55 montre une bonne dispersion des notes attribuées et permet un classement convenable des candidats. Les notes s'étendent entre 5 et 20.

HEC PARIS

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option économique

EXERCICE PRINCIPAL E 65

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On appelle *médiane* de X tout réel m qui vérifie les deux conditions : $P(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $P(X \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}\cdot$

On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

2.a) Montrer que X admet une unique médiane m que l'on calculera.

b) Soit M la fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = E(|X - x|)$.

Étudier les variations de la fonction M sur $\mathbf{R}$ et montrer que m est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Établir l'existence de deux réels c et d tels que : $P\left(\left[Z_n \leqslant \dfrac{c}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ et $P\left(\left[Z_n \geqslant \dfrac{d}{\lambda}\right]\right) = \dfrac{\alpha}{2}$.

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 65

1. Cours.

2.a) On a : $\forall x \geqslant 0,\ P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ et les réels m vérifient : $1 - \mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-\lambda m} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Par suite, l'équation $\mathrm{e}^{-\lambda m} = \dfrac{1}{2}$ fournit l'unique solution : $m = \dfrac{1}{\lambda}\ln 2$.

b) $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = E(|X - x|) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |u - x|\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} (u - x)\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u - \int_0^x (u - x)\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u$.

Des calculs (peut-être un peu longs) mais sans difficulté conduisent à : $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = \dfrac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + x - \dfrac{1}{\lambda}\cdot$

L'étude de la fonction M montre bien que $m = \dfrac{1}{\lambda}\ln 2$ est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3.a) Question classique : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

b) On note G_n la fonction de répartition de Z_n. On cherche c et d (qui sont non nuls) tels que $G_n\left(\dfrac{c}{\lambda}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ et $1 - G_n\left(\dfrac{d}{\lambda}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire $1 - \mathrm{e}^{-n\lambda c/\lambda} = \dfrac{\alpha}{2}$ et $1 - \mathrm{e}^{-n\lambda d/\lambda} = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, d'où :

$$c = -\frac{1}{n}\ln(1 - \alpha/2) \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{n}\ln(\alpha/2)\cdot$$

c) On a : $P\left(\dfrac{c}{\lambda} \leqslant Z_n \leqslant \dfrac{d}{\lambda}\right) = 1 - \alpha \Longrightarrow P\left(\dfrac{Z_n}{d} \leqslant \dfrac{1}{\lambda} \leqslant \dfrac{Z_n}{c}\right) = 1 - \alpha$. Or, $m = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$. Par suite,

$$P\left(\frac{\ln 2}{d}Z_n \leqslant m \leqslant \frac{\ln 2}{c}Z_n\right) = 1 - \alpha.$$

Avec les valeurs de c et d calculées précédemment, l'intervalle $\left[\dfrac{\ln 2}{d}Z_n, \dfrac{\ln 2}{c}Z_n\right]$ est un intervalle de confiance de la médiane m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'un endomorphisme g de E vérifie $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres pour f associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Le sous-espace propre de f associé à λ_i est la droite engendrée par e_i.

• Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de g associés aux valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes), on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f \circ g(e_i) = f(\mu_i e_i) = \mu_i \lambda_i e_i = g(\lambda_i ei) = g \circ f(e_i)$.
Donc, les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ coïncident sur une base et sont donc égaux.

• Réciproquement, si $f \circ g = g \circ f$, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i)$, soit $f\big(g(e_i)\big) = \lambda_i g(e_i)$.
Ainsi, $g(e_i)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i : le sous-espace propre étant la droite engendrée par e_i, le vecteur $g(e_i)$ est colinéaire à e_i et par suite, e_i est un vecteur propre de g.

EXERCICE PRINCIPAL E 82

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

2. Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

a) Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, montrer que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) Établir pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, l'équivalence suivante : $\lfloor y \rfloor \leqslant x \iff y < \lfloor x \rfloor + 1$.

c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\beta \rfloor$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}\cdot$$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n}\cdot$ Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \beta - \alpha$.

b) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n. Conclusion.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 82

1. Cours.

2.a) Par définition, $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \Longrightarrow x - 1/n < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) • $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Longrightarrow \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \Longrightarrow y < \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$.

• $y < \lfloor x \rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

c) $\forall x > 0$, le nombre d'entiers $k \in]0, x]$ est $\lfloor x \rfloor$. Or, $\{k \in \mathbf{N}; n\alpha < k \leqslant n\beta\} = \{k\,; 0 < k \leqslant n\beta\}/\{k\,; 0 < k \leqslant n\alpha\}$
Donc, $N_n(\alpha, \beta) = \lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor$.

3.a) On a : $[\alpha < Y_n \leqslant \beta] = \bigcup\limits_{n\alpha < k \leqslant n\beta} \Big[Y_n = \dfrac{k}{n}\Big] \Longrightarrow P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \sum\limits_{n\alpha < k \leqslant n\beta} P\Big(Y_n = \dfrac{k}{n}\Big) = \dfrac{1}{n} N_n(\alpha, \beta)$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \beta - \alpha$.

b) On a : $P(Y_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. D'autre part, $[Z_n \leqslant x] = \Big[\dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n} \leqslant x\Big] = \big[\lfloor nZ \rfloor \leqslant nx\big]$.

D'après 2.b), on a : $[Z_n \leqslant x] = \big[nZ < \lfloor nx \rfloor + 1\big] = \Big[Z < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\Big] \Longrightarrow P(Z_n \leqslant x) = P\Big(Z < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\Big)$.

Par suite, $P(Z_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Les variables aléatoires Y_n et Z_n ont la même fonction de répartition, donc elles ont la même loi.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Soit x réel et $M(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Le réel λ est valeur propre de $M(x)$ ssi la matrice $A(\lambda) = M(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} x-\lambda & -1 \\ 2x & 2x-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible c'est-à-dire ssi $P(\lambda) = (x-\lambda)(2x-\lambda) + 2x = \lambda^2 - 3x\lambda + 2x^2 + 2x = 0$. Son discriminant est $\Delta = x(x-8)$.

• Si $x \in]0, 8[$, le polynôme $P(\lambda)$ est toujours strictement positif et la matrice $A(\lambda)$ est inversible, donc M n'est pas diagonalisable.

• Si $x = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (0 est l'unique valeur propre).

• Si $x = 8$, alors $M = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Donc, M n'a qu'une valeur propre $\lambda = 12$ et ne peut être diagonalisable.

• Si $x \notin]0, 8[$, le polynôme $P(\lambda)$ admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, donc M admet deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

EXERCICE PRINCIPAL E 83

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit l'application φ de $\mathbf{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k\,!}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2.a) Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbf{R}_p[X]$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbf{R}_p[X],\ f_i(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_p$ les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!],\ a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 83

1. Cours.

2.a) L'application φ est clairement un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. La linéarité est évidente ainsi que le fait que le degré de $\varphi(P)$ est inférieur au degré de P. Cet endomorphisme n'est pas injectif (donc non bijectif) car son noyau est formé des polynômes constants.

b) La famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

c) Un calcul immédiat donne : $\varphi(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = H_{k-1}(X)$.

La matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est donc une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous nuls et les éléments de la sur-diagonale sont égaux à 1, les autres éléments étant nuls.

d) La matrice triangulaire M' n'admet que la valeur propre 0 ; par suite, elle n'est pas diagonalisable.

3.a) Soit Q et R deux polynômes de $\mathbf{R}_p[X]$ et α un réel. On a :

$$f_i(\alpha Q + R) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} (\alpha Q + R)(k) = \alpha \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k) + \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} R(k) = \alpha f_i(Q) + f_i(R).$$

b) Remarquons que si $j \in [\![0, p]\!]$, $H_j(j) = 1$ et pour tout $k \in [\![0, j[\![$, $H_j(k) = 0$.

On a alors : $\forall i \in [\![0, p]\!],\ f_i(H_i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_i(k) = H_i(i) = 1$.

De plus, $\forall j \in [\![0, p]\!],\ f_i(H_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_j(k) = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_j(k) = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{1}{j!} \prod_{\ell=0}^{j-1} (k - \ell)$, soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!],\ f_i(H_j) = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{i-j}{k-j} = \binom{i}{j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^{i-k-j}\binom{i-j}{k}$

soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!],\ f_i(H_j) = \binom{i}{j}(-1)^{i-j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^{k}\binom{i-j}{k} = 0$ d'après la formule du binôme.

c) On a : $f_i(X^p) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}k^p = a_0 f_i(H_0) + a_1 f_i(H_1) + \cdots + a_p f_i(H_p) = a_i$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$.
Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E\big(f(Y_n)\big) = E\big(f(Z)\big)$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

On sait que (transfert) $E\big(f(Y_n)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, et d'après les "sommes de Riemann" et la continuité de f sur $[0,1]$: $\lim_{n\to+\infty} E\big(f(Y_n)\big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = E\big(f(Z)\big)$.

EXERCICE PRINCIPAL E 85

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(X_n = 1) = p,\ P(X_n = -1) = q,\ P(X_n = 0) = r\,.$$

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.

2.a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $P(Y_n = 0)$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $E(X_n)$ et $E(Y_n)$.

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(Y_n = 1)$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

4.a) Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $V(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL E 85

1. Cours.

2.a) $Y_n(\Omega) = \{-1,0,1\}$. Par indépendance et incompatibilité : $P(Y_n \neq 0) = (p+q)^n \Longrightarrow P(Y_n = 0) = 1-(p+q)^n$.

b) On a : $E(X_n) = p - q$ et par indépendance du produit de variables aléatoires, $E(Y_n) = (p-q)^n$.

3.a) On a clairement : $p_1 = p = \dfrac{(p+q)+(p-q)}{2}$ et $p_2 = p^2 + q^2 = \dfrac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{2}$.

b) On a : $p_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0])$.
Or, $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0] = \emptyset \Longrightarrow P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0]) = 0$, $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1] = [X_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]$ et $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1] = [X_{n+1} = -1] \cap [Y_n = -1]$. D'après le lemme des coalitions, X_{n+1} et Y_n sont indépendantes $\Longrightarrow p_{n+1} = P(X_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) + P(X_{n+1} = -1)P(Y_n = -1) = p\,p_n + q\,P(Y_n = -1)$.
Or, $P(Y_n = -1) = 1 - p_n - P(Y_n = 0) = -p_n + (p+q)^n \Longrightarrow p_{n+1} = (p-q)p_n + q(p+q)^n$.

c) Les valeurs initiales p_1 et p_2, l'hypothèse de récurrence $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$ pour un certain n et la relation de récurrence de la question b) $\Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*,\ p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Puisque $P(Y_n = 0) = 1 - (p+q)^n$ et que $E(Y_n) = P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n$, on a les équations suivantes :

$$\begin{cases} P(Y_n = 1) + P(Y_n = -1) = (p+q)^n \\ P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(Y_n = 1) = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} \\[2ex] P(Y_n = -1) = \dfrac{(p+q)^n - (p-q)^n}{2} \end{cases}.$$

4.a) Puisque $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on a : $0 \leqslant (p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq < p^2 + q^2 < p + q$.

EXERCICE PRINCIPAL E 86

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t$.

2.a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

b) Étudier la suite $\big(f_n(0)\big)_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$.

3.a) Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation : $f_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\cdot$

b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4.a) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$.

b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée f_n'.

c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, les deux réels y et $1 - \mathrm{e}^{-y}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue en 0.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 86

1.Cours.

2.a) Pour $0 \leqslant x \leqslant y$, la croissance de l'exponentielle et les bornes "bien rangées"$\Longrightarrow f_n(x) \geqslant f_n(y)$.

b) Le calcul donne $f_n(0) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$ et la décroissance de f_n sur $\mathbf{R}_+ \Longrightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0) = \dfrac{1}{n+1}\cdot$

Par encadrement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

3.a) Une IPP $\Longrightarrow f_{n+1}(x) = \left[-\dfrac{1}{x}\, \mathrm{e}^{-tx} t^{n+1}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\dfrac{1}{x}\, \mathrm{e}^{-tx}(n+1)\, t^n\, \mathrm{d}t = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\cdot$

b) On a pour tout $x \geqslant 0$, $f_0(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ et $f_1(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\cdot$

c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$, on a bien $f_0(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ équivalent à $\dfrac{1}{x} = \dfrac{0!}{x^{0+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Soit un entier n tel que $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

À l'aide de la question 3.a), on a : $\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)!} f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} f_n(x) - \dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!}\cdot$ Le second membre tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ d'après l'hypothèse de récurrence.

4.a) Le changement de variable linéaire $u = tx \Longrightarrow f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$. Le théorème fondamental de l'intégration permet de dire que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x u^n\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et finalement, on obtient :

$\forall x > 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{n+1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^n\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u + \dfrac{1}{x^{n+1}}\, x^n \mathrm{e}^{-x} = -\dfrac{n+1}{x} f_n(x) + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -f_{n+1}(x)$.

b) Un argument de convexité, par exemple, montre que $\forall y \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-y} \leqslant y$.

On a : $0 \leqslant |f_n(0) - f_n(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^n\, \mathrm{e}^{-tx}\, \mathrm{d}t\right| = \int_0^1 t^n(1 - \mathrm{e}^{-tx})\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n tx\, \mathrm{d}t = \dfrac{x}{n+2}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Par encadrement, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0)$ et f_n est continue en 0.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

Soit c et r deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{r\,c^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln X - \ln c$.

3. Compléter les lignes du code *Scilab* suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant cent réalisations de la loi de la variable aléatoire X.

```
c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand( ?, ?, ?, ?)
V=c*exp(U)
```

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

1. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}\backslash\{c\}$, positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,c^r}{x^{r+1}}\,\mathrm{d}x = 1$

2. $F_X(x) = 0$ si $x \leqslant c$ et $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{c}{x}\right)^r$ si $x > c$. Or, $X(\Omega) =]c, +\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$.

$\forall y \in \mathbf{R}_+^*,\ P(Y \leqslant y) = P(X \leqslant c\,\mathrm{e}^y) = 1 - \left(\dfrac{c}{c\,\mathrm{e}^y}\right)^r = 1 - \mathrm{e}^{-ry}$, donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(r)$.

3.
```
c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand(1,n,"exp",1/r)
```
car $E(Y) = 1/r$.
```
V=c*exp(U)
```

EXERCICE PRINCIPAL E 88

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.a) On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ P(T = k) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^k.$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$ On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 88

1. Cours.

2.a) $T(\Omega) = \mathbf{N} \Longrightarrow \forall k \in \mathbf{N},\ [T = k] = [k \leqslant X < k + 1] \Longrightarrow P(T = k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(e^{-\lambda}\right)^k.$

b) $T+1$ suit la loi géométrique (classique) de paramètre $1 - e^{-\lambda} \Longrightarrow E(T+1) = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} \Longrightarrow E(T) = \dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$.

On a : $V(T+1) = V(T) = \dfrac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}\cdot$

3. $Z(\Omega) = [0, 1[$, donc, $F_Z(z) = 0$ si $z < 0$ et $F_Z(z) = 1$ si $z \geqslant 1$. D'autre part, $\{T = k\}_{k\in\mathbf{N}}$ est un sce, d'où,

$\forall z \in [0, 1[,\ F_Z(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P\big([Z \leqslant z] \cap [T = k]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leqslant X \leqslant k + z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(F_X(k+z) - F_X(k)\big)$, soit encore,

$\forall z \in [0, 1[,\ F_Z(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+z)}\right) = (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda})^k = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}\cdot$

La fonction F_Z est continue sur $\mathbf{R}$, de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. Donc, Z est une variable aléatoire réelle à densité.

Une densité f_Z de Z est par exemple : $f_Z(z) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}$ si $0 \leqslant z \leqslant 1$ et $f_Z(z) = 0$ sinon.

4. D'après la question 3, $F_{Z_n}(z) = 0$ si $z < 0$, $F_{Z_n}(z) = 1$ si $z > 1$ et $F_{Z_n}(z) = \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}}$ si $0 \leqslant z \leqslant 1$.

On sait que $1 - e^{-u}$ est équivalent à u lorsque u tend vers 0. Par suite, pour $z \neq 0$, $\dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}}$ est équivalent à z lorsque n tend vers $+\infty \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = z$.

En conséquence, la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\text{rg}(f^2) = 1$.
Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X^2 - 1)$ est annulateur de $f \Longrightarrow \text{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$.

- Si 0 n'est pas valeur propre de $f \Longrightarrow f$ est bijective $\Longrightarrow f^2 = \text{id}$ est bijective $\Longleftrightarrow \text{rg}(f^2) = 3$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
- Si 1 et -1 sont valeurs propres de $f \Longrightarrow f$ est diagonalisable $\Longrightarrow f^2$ est diagonalisable et semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rg}(f^2) = 2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Bilan : le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$. On pose : $\forall n \in \mathbf{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b) Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$, une relation entre I_n et I_{n+2}.

c) Calculer I_0 et I_1.

3.a) Montrer que f_1 est une densité de probabilité.

b) Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f_1 pour densité.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

d) Justifier l'existence de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4. On pose : $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Quelle est la loi de Y ?

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Cours.

2.a) On a : $0 \leqslant x^2 f_n(x) = x^{n+2}\exp(-x^2/2)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc $f_n(x)$ est négligeable devant $1/x^2$ et la règle de Riemann permet de conclure à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b) On dérive x^{n+1} et on intègre $x\exp(-x^2/2)$ en $-\exp(x^2/2)$. Une IPP sur $[0, A]$ et un passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n$.

c) Par référence à la loi normale centrée réduite et à la parité de $x \longmapsto \exp(-x^2/2)$ sur $\mathbf{R}$, on a : $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Une primitive de $x \longmapsto x\exp(-x^2/2)$ est $x \longmapsto -\exp(-x^2/2) \Longrightarrow I_1 = 1$.

3.a) On a : $f_1 \geqslant 0$, continue sur $\mathbf{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = I_1 = 1 \Longrightarrow f_1$ est une densité de probabilité.

b) On a : $f'(x) = (1-x^2)\exp(-x^2/2)$ et $f''(x) = x(x^2-3)\exp(-x^2/2)$.

La fonction f_1 est nulle sur $\mathbf{R}_-$, croissante et concave sur $[0,1]$ et prenant ses valeurs dans $[0, 1/\sqrt{e}]$, puis décroît sur $[1, +\infty[$ en restant concave sur $[1, \sqrt{3}]$ puis convexe au-delà de $\sqrt{3}$.

c) $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$ si $x \geqslant 0$.

d) La justication de l'existence de $E(X)$ et $E(X^2)$ a été établie en 2.a).

La relation de récurrence de 2.b) $\Longrightarrow I_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $I_3 = 2 \Longrightarrow E(X) = I_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $V(X) = 2 - \pi/2$.

4.a)b) On trouve classiquement : $G(x) = 0$ si $x < 0$ et $G(x) = 1 - \exp(-x/2)$ si $x \geqslant 0$.

La fonction de répartition G de Y est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, donc Y est à densité et plus précisément, on reconnaît en Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker} f$ et une base de $\text{Im} f$.

2. On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A et I (matrice identité de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

1. Les deux premières colonnes de A sont opposées : le rang de A est égal à 2.
On a : $\text{Im} f = \text{Vect}\big((-1,0,1),(1,2,1)\big)$ et $\text{Ker} f = \text{Vect}\big((1,1,0)\big)$.

2.a) On a : $M = A + I$. La matrice A est nilpotente et sa seule valeur propre est 0, donc la seule valeur propre de M est 1. Or, M n'est pas semblable (égale) à I, donc M n'est pas diagonalisable.

b) Le réel 0 n'est pas valeur propre de M, donc M est inversible.
On utilise l'identité remarquable : $A^3 + I^3 = (A+I)(A^2 - A + I) \Longrightarrow M(A^2 - A + I) = I \Longrightarrow M^{-1} = A^2 - A + I$.

EXERCICE PRINCIPAL

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres

   Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. de loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

   a) Calculer la fonction de répartition de U_n.

   b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $P([U_n \geq \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code *Scilab* suivant pour que la fonction "minu" simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
function u=minu(k)
  x= ...
  u=min(x)
endfunction
```

4. Soit $p \in]0,1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$P([Z \leq x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} P([U_k \leq x])$$

   (on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

   a) Justifier, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité : $P([Z \leq x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.

   b) En déduire une densité de Z.

5. a) Justifier que la fonction *Scilab* suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```
function z=geomin(p)
  z=minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

   b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p=0.5;
R=[];
for k=1:10000
  R=[R,geomin(p)]
end;
disp(mean(R))
```

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 90

1. Cours.

2.a) $\forall x \in [0,1[$, $P(U_n \leqslant x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\Big) = 1 - (1-x)^n$ par indépendance des X_i.

$\forall x < 0$, $P(U_n \leqslant x) = 0$ et $\forall x > 1$, $P(U_n \leqslant x) = 1$.

b) $P(U_n \geqslant \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \geqslant \varepsilon) = 0$ car $0 < 1 - \varepsilon < 1$.

3. On peut utiliser `x=grand(1,n,'def')` ou `x=rand(1,n)`.

4.a) $\forall x \in [0,1]$, $P(Z \leqslant x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}\big(1-(1-x)\big)^k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}(1-x)^k$, soit encore,

$P(Z \leqslant x) = 1 - p(1-x)\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\big(q(1-x)\big)^{k-1} = 1 - p(1-x)\dfrac{1}{1-q(1-x)} = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+qx}$ (avec $q = 1-p$).

b) Par dérivation, on en déduit : $\forall x \in [0,1]$, $f_Z(x) = \dfrac{p}{(p+qx)^2}$.

5.a) Si N est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p, alors Z est la variable aléatoire définie par : si $[N=k]$ est réalisé, alors $Z = U_k$ et $P(U_k \leqslant x) = P_{[N=k]}(Z \leqslant x)$.

La commande `grand(1,1,'geom',p)` génère une valeur prise par une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

b) Dans le programme, R est un vecteur ligne qui contient 10000 réalisations de Z pour la valeur p du paramètre et on affiche la moyenne de ces valeurs. Le résultat affiché est donc une valeur approchée de l'espérance de Z.

On a : $E(Z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{px}{(p+qx)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{q}\Big(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{p+qx} - \int_0^1 \frac{p\,\mathrm{d}x}{(p+qx)^2}\Big) = -\frac{p}{q^2}\ln p - \frac{p}{q}$.

Pour $p = 1/2$, on a $E(Z) = 2\ln 2 - 1$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 90

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}\,dt - \int_x^1 e^{-nt^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.

2.a) Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté c_n, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt$.

3.a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION 90

1. Le théorème fondamental du calcul intégral (continuité des intégrandes) permet de dire que f_n est dérivable et on a : $f_n'(x) = e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0 \Longrightarrow f_n$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

2.a) La fonction f_n continue et strictement croissante sur $[0,1]$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$. Il est clair que $f_n(0) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \leqslant 0$ et $f_n(1) = \displaystyle\int_0^1 e^{nt^2}\,dt \geqslant 0$. Par suite, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $c_n \in [0,1]$, c'est-à-dire : $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt = 0$.

b) On a : $f_{n+1}(c_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(c_n) = \displaystyle\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}\,dt - \int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2} \geqslant 0 = f_n(c_n) = f_{n+1}(c_{n+1})$ par croissance de la fonction exponentielle. Donc, $0 = f_{n+1}(c_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(c_n)$ et puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$, on a : $c_{n+1} \leqslant c_n$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.