

★ Analyse

1. Formule du binôme.

Soit a et b deux réels et n un entier naturel. On a : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Cette formule s'applique à des matrices carrées de même ordre à condition qu'elles commutent.

2. Enoncés des inégalités des accroissements finis.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si pour tout $x \in I$ on a : $|f'(x)| \leq k$ alors :

$$\forall (a, b) \in I, |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$$

3. Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I . f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

4. Convergence et divergence des suites réelles monotones.

Soit (u_n) une suite.

- Si (u_n) croissante et majorée par M alors elle converge vers une limite $\ell \leq M$.
- Si (u_n) décroissante et minorée par m alors elle converge vers une limite $\ell \geq m$.
- Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

5. énoncer le théorème de la bijection.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est continue et strictement monotone sur I alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Sa bijection réciproque admet les mêmes variations que f .

6. Quel est le lien entre la continuité et la dérivabilité d'une fonction ?

Une fonction dérivable en un point a est continue en ce point. La réciproque est fausse. On peut citer les fonctions valeurs absolues et racine carrée et tracer leur graphe pour s'en convaincre (point anguleux pour l'une, tangente verticale pour l'autre).

7. Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet un unique antécédent dans E .

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8. a) Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

Pour tout réel x il existe un entier n tel que $n \leq x < n + 1$. L'entier n est appelé partie entière de x et noté $\lfloor x \rfloor$.

Autre définition : la partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

b) Donner un programme permettant de représenter la fonction partie entière sur $[-5/2, 5/2]$.

```
x = np.linspace(-5/2, 5/2, 100)
y = np.floor(x)
plt.plot(x, y)
```

9. Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Attention ! Il n'y a pas d'hypothèse de dérivabilité sur f !

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . f est convexe sur I si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Notons que f est concave si $-f$ est convexe.

On peut remarquer que :

- si f est de classe C^1 sur I alors f est convexe sur I si f' est croissante sur I .
- Si f est de classe C^2 sur I alors f est convexe sur I si f'' est positive sur I .

10. Définition et propriété des fonctions de classe C^p , $p \in \mathbb{N}$.

f est de classe C^p sur un intervalle I si elle est p fois dérivables sur I et si sa dérivée p -ème est continue sur I .

La somme, le produit le quotient, la composée de fonctions de classe C^p est de classe C^p .

11. Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Attention ! Il n'y a pas d'hypothèse sur la non nullité des fonctions. Il faut donc donner la définition générale.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a, +\infty[$. On a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de $+\infty$ telle que :

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 1$$

Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

12. Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Propriétés de l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

Notons F cette fonction. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a . On peut le démontrer si le jury le demande en posant G une primitive de f et en écrivant l'intégrale sous forme de crochets.

Cette fonction est de classe C^1 sur I .

13. Enoncer le théorème d'intégration par parties.

Soit a et b deux réels et u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ (ou $[b, a]$ si $b < a$). On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

14. Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe C^2 sur I et si a est un point de I alors f admet un développement limité d'ordre 1 en a donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

15. énoncer le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

En fait il y a plusieurs théorèmes de comparaison. Il faut regarder dans la suite de l'exercice celui qu'on doit utiliser et l'énoncer.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- On suppose que, à partir d'un certain rang, on a pour tout entier n on a : $0 \leq u_n \leq v_n$.
 - i. si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
 - ii. si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.
- On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$
 - i. si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
 - ii. si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

16. Définition de la convergence d'une série numérique.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique. On pose pour tout $n \geq n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ admet une limite finie.

On pose alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim S_n$.

17. Définition de la convergence d'une intégrale impropre.

Attention! La question ne précise pas en quel point l'intégrale est impropre. Il faut donc donner plusieurs définitions.

- Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(t)dt$ existe et est finie.
- On définit de même la convergence de $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ si f est continue sur $] -\infty, a]$ et celle de $\int_a^b f(t)dt$ si f est continue sur $]a, b]$.
- Il est facile de généraliser, si le jury le demande à une intégrale plusieurs fois impropre.

18. Critères de convergence d'une intégrale impropre.

On considère deux fonctions f continues sur $[a, +\infty[$ (on généralise sans problème aux autres cas).

- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument alors elle converge.

On suppose que f est à valeurs positives et on considère une fonction g continue et à valeurs positives sur $[a, +\infty[$.

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.
- Si au voisinage de $+\infty$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$.
 - i. si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
 - ii. si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.
- On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x))$
 - i. si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
 - ii. si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.

19. Donner les critères de convergence des séries à termes positifs.

On reprend les critères du point 15. et on ajoute la convergence absolue.

20. Rappeler les conditions suffisantes pour que (x_0, y_0) soit un minimum local pour g .

g admet un minimum local en (x_0, y_0) s'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ contenant (x_0, y_0) tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$ on a : $g(x, y) \geq g(x_0, y_0)$.

Si g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (ou plus généralement sur un ouvert contenant (x_0, y_0)) et si g admet un minimum local en (x_0, y_0) alors $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

21. Soit f une fonction de classe C^2 sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition d'un point critique et la condition suffisante d'extremum local en ce point.

Un point $A = (a, b)$ est un point critique de f si $\nabla(f)(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si A est un point critique de f la fonction f admet un extremum local en ce point si la matrice hessienne de f en A admet deux valeurs propres non nulles et de même signe.

Si les valeurs propres sont de signes opposés, il n'y a pas d'extremum local. Si l'une des valeurs propres est nulle alors on ne peut pas conclure.

A la demande du jury on peut définir $\nabla(f)(A)$ et la matrice hessienne.

Autres questions possibles

22. Méthode d'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit (u_n) une suite vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Je pose l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$.

- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions x_1 et x_2 . Il existe alors deux constantes A et B telles que pour tout $n : u_n = A(x_1)^n + B(x_2)^n$.
- Si $\Delta = 0$, il y a une solution x_0 . Il existe alors deux constantes A et B telles que pour tout $n : u_n = A(x_0)^n + Bn(x_0)^n$.

Les constantes A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales.

23. Définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ (où $\pm\infty$).

- $\lim u_n = \ell$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
- $\lim u_n = +\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a : $u_n \geq A$.

24. Définition de $f(x)$ tend vers ℓ (où $\pm\infty$) lorsque x tend vers a .

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \alpha, a + \alpha]$ on a : $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a - \alpha, a + \alpha] \setminus \{a\}$ on a : $f(x) \geq A$.

25. Comparaison des fonctions au voisinage de $+\infty$.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a, +\infty[$.

- On a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de $+\infty$ telle que :

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 1$$

Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

- On a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x))$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de $+\infty$ telle que :

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On peut, à la demande du jury, donner le tableau des négligeabilités des fonctions usuelles.

26. énoncer l'inégalité de convexité.

Voir question 9..

27. Intégrales de Riemann.

On appelle intégrales de Riemann les intégrales impropres de la forme : $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt$.

La première converge ssi $\alpha > 1$; la deuxième converge ssi $\alpha < 1$.

28. Séries de Riemann.

On appelle séries de Riemann les séries de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Elles convergent ssi $\alpha > 1$.

29. Séries géométriques et séries géométriques dérivées.

Ce sont les séries de termes généraux q^n ; nq^{n-1} et $n(n-1)q^{n-2}$ où $q \in \mathbb{R}$.

Elles convergent ssi $|q| < 1$. La convergence est alors absolue. On a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0} \frac{1}{1-q} ; \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

30. Définition de la négligeabilité d'une fonction devant une autre en un point (ou en l'infini).

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a (a pouvant être égal à $\pm\infty$).

$f(x)$ est négligeable de $g(x)$ au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et si au voisinage de $a : f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

Rmq. On pourrait juste dire que $f(x)$ est négligeable de $g(x)$ au voisinage de a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ mais on risque d'être pénalisé car cela ne fonctionne pas si $g(x)$ s'annule au voisinage de a .

31. énoncer le théorème de Schwarz.

Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors en tout point $M = (x, y)$ on a :
 $\partial_{1,2}^2(f)(M) = \partial_{2,1}^2(f)(M)$.

32. Résolution des équations différentielles $y' + ay = 0$ et $y'' + ay' + by = 0$.

• Premier degré.

$$S = \{t \mapsto Ce^{-at} \text{ avec } C \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(t \mapsto e^{-at}).$$

• Seconde degré

On pose l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

- Si il y a deux solutions r_1 et r_2 alors $S = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_1 t}; t \mapsto e^{r_2 t})$.
- Si il y a une solution r_0 alors $S = \{t \mapsto C_1 e^{r_0 t} + C_2 t e^{r_0 t} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_0 t}; t \mapsto t e^{r_0 t})$.

33. Problème de Cauchy.

Un problème de Cauchy est la donnée d'une équation différentielle (ou d'un système différentiel) avec condition(s) initiale(s).

- a) Premier ordre : $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.
- b) Second ordre : $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$.
- c) Système diff : $\begin{cases} a_{11}x' + a_{12}y' = 0 \\ a_{21}x' + a_{22}y' = 0 \\ x'(t_0) = x_0 \\ y'(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

34. Enoncer le principe de superposition des solutions d'une équation différentielle.

Si une équation différentielle (E) admet comme second membre une fonction de la forme $f_1 + f_2$ alors ses solutions sont de la forme $y_1 + y_2$ où y_1 est solution de l'équation avec second membre f_1 et y_2 est solution de l'équation avec second membre f_2 .

35. Donner la méthode de détermination de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle avec second membre

Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $y_h + y_p$ où y_h est solution du système homogène associé et y_p est solution particulière de l'équation avec second membre.

36. Donner la définition d'un état d'équilibre d'un système différentiel.

Les états d'équilibre d'un système différentiel sont les solutions constantes.

37. Dans quel cas peut-on dire que toutes les trajectoires d'un système différentiel sont convergentes ?

Si une trajectoire converge alors elle converge vers un état d'équilibre. Si le système différentiel est de la forme $Y' = AY$ et si les VP de A sont négatives ou nulles alors toutes les trajectoires convergent.

★ **Probabilités**

• **Probabilités discrètes**

1. Formule des probabilités totales.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (il ne faudra pas oublier de commencer par ce point la plupart des questions de cours de probas).

On considère un événement B et $(A_i)_{i \in I}$ un SCE où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

2. Loi d'une variable aléatoire discrète finie

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire. On dit que X est finie si $X(\Omega)$ est fini.

Sa loi est l'ensemble des couples (k, p_k) où $k \in X(\Omega)$ et $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.

3. Définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète.

- Si $X(\Omega)$ est fini alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$.
- Si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini et si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$.

4. Formule des probabilités composées.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

5. Le schéma binomial.

Soit $\mathcal{E}$ une expérience, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé relatif à cet expérience et A un événement de probabilité p . On renouvelle n fois dans des conditions identiques et indépendantes l'expérience $\mathcal{E}$. On comptabilise le nombre de succès de A .

La variable aléatoire ainsi définie suit une loi binomiale de paramètre p

6. Coefficients binômiaux ; interprétation ensembliste.

Soit n et p deux entiers naturels. On a $\binom{n}{p} = 0$ si $n < p$ et $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leq n$.

$\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

A la demande du jury on peut aussi préciser que $\binom{n}{p}$ est le nombre de chemin à p succès dans un arbre succès / échec de niveau n (cf. le point précédent sur le schéma de Bernoulli).

7. Rappeler la formule de Kœnig-Huygens.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire

Si X admet un moment d'ordre 2 alors X admet une variance et on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

8. Définition et propriétés de la loi géométrique.

Soit $\mathcal{E}$ une expérience, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé relatif à cet expérience et A un événement de probabilité p . Soit X la variable aléatoire égale au temps d'attente d'un premier succès de A .

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$$

X admet une espérance et une variance. De plus $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

On peut aussi dire que X est sans mémoire c'est à dire que si n et m sont deux entiers on a : $\mathbb{P}_{(X \geq n)}(X \geq n+m) = \mathbb{P}(X \geq m)$.

9. Définition de l'indépendance de n variables aléatoires discrètes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.

$X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si pour tout $(i_1, \dots, i_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = i_k)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = i_k)$$

10. Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes. Lien entre indépendance et covariance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes.

X et Y sont indépendantes si pour tout $i \in X(\Omega)$ et tout $j \in Y(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$$

Si X et Y sont indépendantes et si (X, Y) admet une covariance alors $\text{cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse.

11. Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes.

- La loi du couple (X, Y) est la donnée de tous les triplets (i, j, p_{ij}) avec $i \in X(\Omega)$, $j \in Y(\Omega)$ et $p_{ij} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$.
- Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y elles sont données par la FPT :

$$\forall i \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) \text{ et } \forall j \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$

- La loi conditionnelle de X sachant Y est la donnée des triplets (i, j, p_{ij}) avec $i \in X(\Omega)$, $j \in Y(\Omega)$ et $p_{ij} = \mathbb{P}_{(Y=j)}((X = i))$.

12. Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes. Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 on pose :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- $\text{cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
- La covariance est symétrique, linéaire à gauche, linéaire à droite.
- Si X et Y sont indépendantes alors $\text{cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse.

• **Variables aléatoires à densité ou générales**

12. Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance. Alors XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

13. Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à densité.

Sa fonction de répartition est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points, croissante.

Elle vérifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

14. Définition d'une densité de probabilité.

Deux définitions sont possibles.

- Une densité de probabilité est une fonction f qui est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et est égale à 1.
- Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle coïncide avec la dérivée de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité en tout point où celle ci est de classe C^1 .

15. Définition et propriété de la loi exponentielle.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire à densité X suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ si sa fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x < 0, F(x) = 0 \text{ et } \forall x \geq 0, F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

$$\text{Une densité de } X \text{ est alors donnée par } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Elle admet une espérance } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha} \text{ et une variance } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Elle est sans mémoire. C'est à dire que si s et t sont deux réels, $\mathbb{P}_{(X \geq s)}(X \geq s + t) = \mathbb{P}(X \geq t)$.

16. Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire à densité X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ si sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Une densité de X est alors donnée par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Elle admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ et une variance $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

17. écrire sous forme intégrale la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite appartienne à un segment $[a, b]$. Dans quel théorème cette probabilité apparaît-elle comme limite ?

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On a :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Cette probabilité apparaît dans le théorème central limite. Plus précisément, soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire indépendantes ayant la même espérance m et la même variance $\sigma^2 \neq 0$.

On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Alors $(\bar{X}_n)^*$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$. C'est à dire que pour tout couple (a, b) de réels tels que $a \leq b$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq \bar{X}_n^* \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

18. Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire.

On dit que (X_n) converge en loi vers X si on tout point où F_X est continue on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

19. Enoncer le théorème limite central.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle. La suite des variables aléatoires centrées réduites $\bar{X}_n^* = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

Où bien sûr $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq \bar{X}_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

20. Estimateur

Soit θ un paramètre inconnu. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire. Soit $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

Toute fonction $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ de $X_1, \dots, X_n$ ne dépendant pas de θ est un estimateur de θ .

21. Loi faible des grands nombres.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant la même espérance m et la même variance.

On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$.

22. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire admettant une variance. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, ; \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Autres questions possibles

22. énoncer la formule de Bayes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}$$

23. énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et g une fonction définie sur I telle que $X(\Omega) \subset I$.

$Y = g(X)$ admet une espérance ssi la série $\sum_{n \in X(\Omega)} g(n) \mathbb{P}(X = n)$ est absolument convergente.

On a alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n \in X(\Omega)} g(n) \mathbb{P}(X = n)$.

24. énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire à densité.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à densité et g une fonction définie sur I telle que $g(I) \subset X(\Omega)$. Soit f une densité de X .

$Y = g(X)$ admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ converge absolument.

On a alors $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$.

25. Variance d'une somme de deux variables aléatoires. Variance d'une somme de n variables aléatoires indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires admettant des variances. Alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$$

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes admettant des variances alors $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$$

26. Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Propriétés.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit d'une variable aléatoire X qu'elle suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si sa loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et une variance $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

27. Stabilité des lois de Poisson ; binomiales ; normales.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et si X et Y sont indépendantes alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

28. énoncer l'inégalité de Markov.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance.

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

29. Définition d'un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$ pour un paramètre θ inconnu.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites d'estimateur de θ tels que $\mathbb{P}(U_n \leq V_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$ si $\mathbb{P}(U_n \leq \theta \leq V_n) \geq 1 - \alpha$.

30. Définition d'un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1 - \alpha$ pour un paramètre θ inconnu.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites d'estimateur de θ tels que $\mathbb{P}(U_n \leq V_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$ si pour tout entier $n \geq 1$ on a : $\mathbb{P}(U_n \leq \theta \leq V_n) \geq 1 - \alpha_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$.

31. Etats stables - états limites d'une chaîne de Markov

Un état stable d'un processus de Markov de matrice de transition $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice ligne $V \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ stochastique telle que $VM = V$. C'est un vecteur propre de tM associé à la VP 1.

Un état limite d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 1}$ est la matrice ligne :

$$(\lim \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \cdots \quad \mathbb{P}(X_n = r))$$

où $E = \llbracket 1, r \rrbracket$ est l'ensemble des états possibles. Si l'état limite existe, c'est un état stable.

32. Si A est la matrice d'adjacence, carrée d'ordre n d'un graphe orienté que peut on dire si $I + A + \cdots + A^{n-1}$ a t

Dans ce cas, on peut dire que le graphe est fortement connexe. C'est à dire qu'il existe un chemin reliant n'importe quel sommet du graphe à n'importe quel autre.

33. Définition du degré d'un sommet dans un graphe. Formule d'Euler (ou lemme des poignées de mains).

Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs (ou de chemins) dont ce sommet est une extrémité.

La formule d'Euler énonce qu'un graphe admet un nombre pair de sommets de degré impairs.

★ **Algèbre**

1. Quel est le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments.

Posons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_n\}$. Une bijection de E dans F associe à chaque élément de E un élément distinct de F .

x_1 a n images possibles puis x_2 en a $n-1$ et ainsi de suite. Le nombre de bijections de E dans F est donc $n!$.

2. Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes.

Soit P et Q deux polynômes. En convenant que le polynôme nul est de degré $-\infty$ on a :

- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q))$. Il y a égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

3. Nombre de racines d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ non nul admet au plus n racines.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admet $n+1$ racines alors c'est le polynôme nul.

4. Définition de deux matrices semblables.

Il y a deux définitions possibles. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n .

- A et B sont semblables s'il existe une matrice carrée inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.
- A et B sont semblables si elles sont les matrices associées à un même endomorphisme dans deux bases différentes.

5. Définition d'une matrice inversible.

Soit A une matrice carrée d'ordre n . A est inversible si il existe une matrice B telle que

$$AB = BA = I_n$$

6. Rappeler la définition d'un vecteur propre d'une matrice. énoncer la propriété relative à une famille de vecteurs propres d'une matrice associés à des valeurs propres distinctes.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Un vecteur colonne U de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A si $U \neq 0$ et s'il existe un réel λ tel que $AU = \lambda U$.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

7. Condition suffisante de diagonalisabilité.

Pour qu'une matrice carrée d'ordre n (ou un endomorphisme f d'un EV de dimension n) soit diagonalisable il suffit qu'elle admette n valeurs propres distinctes.

8. Définition d'un polynôme annulateur d'une matrice. Lien avec les valeurs propres.

Soit A une matrice carrée et P un polynôme. P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = \mathcal{O}$.

Les valeurs propres possibles de A sont les racines de P . En d'autres termes $\text{Sp}(A) \subset Z(P)$.

9. énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

On demande **une** condition nécessaire et suffisante. Il y a plusieurs réponses possibles. Soit M une matrice carrée d'ordre n :

- M est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres de M est égale à n .
 - M est diagonalisable ssi il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M .
10. Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux espaces vectoriels.
 f est un isomorphisme si f est une application linéaire bijective.
11. Définition de la dimension d'un espace vectoriel.
 Soit E un espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B}$. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. On pose : $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B})$.
12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Donner la définition d'une famille génératrice de E . Que peut-on dire de son cardinal ?
 Une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est génératrice de E si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ c'est à dire que chaque élément de E est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$.
 On a alors $\text{card}(\mathcal{F}) \geq n$.
13. Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Comparer cette dimension avec le cardinal d'une famille libre de vecteurs de ce même espace.
 Dimension : voir 11.
 Si E est de dimension n et si $\mathcal{F}$ est une famille libre d'éléments de E alors $\text{card}(\mathcal{F}) \leq n$.
14. Donner la définition d'une valeur propre. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable.
 Soit A une matrice carrée d'ordre n et λ un réel.
 λ est une valeur propre de A si il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nulle** telle que $AX = \lambda X$.
 On peut aussi dire que λ est valeur propre de A si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
 Une dernière possibilité : λ est VP de A si $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\mathcal{O}\}$.

- A est diagonalisable ssi la somme des dimensions des espaces propres de A est égale à n .
- A est diagonalisable ssi il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A .

Autres questions possibles

15. Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base d'un espace vectoriel.
 Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille de vecteurs de E .
- $\mathcal{F}$ est libre si pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ on a :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$
 - $\mathcal{F}$ est génératrice de E si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$ c'est à dire que chaque élément de E est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$.
 - $\mathcal{F}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E .
16. Définition et propriétés du noyau d'une application linéaire.
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

 $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E . De plus, f est injective ssi $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.
17. Définition et propriétés de l'image d'une application linéaire.
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

$$\text{Im}(f) = \{\vec{v} \in F \mid \exists \vec{u} \in E, f(\vec{u}) = \vec{v}\}$$

 $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F . De plus, f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.
18. énoncer le théorème du rang.
 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire telle que E soit un EV de dimension finie. On a :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$$

19. énoncer les formules de changement de bases.

Soit E un EV de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

- Soit $\vec{u} \in E$, X la matrice associée à $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice associée à $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

On a : $X = PX'$.

- Soit f un endomorphisme de E , M la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$ et M' la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}'$.

On a : $M' = P^{-1}MP$.

20. Définition de l'injectivité, de la surjectivité d'une application.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- f est injective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent dans E .
- f est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent dans E .